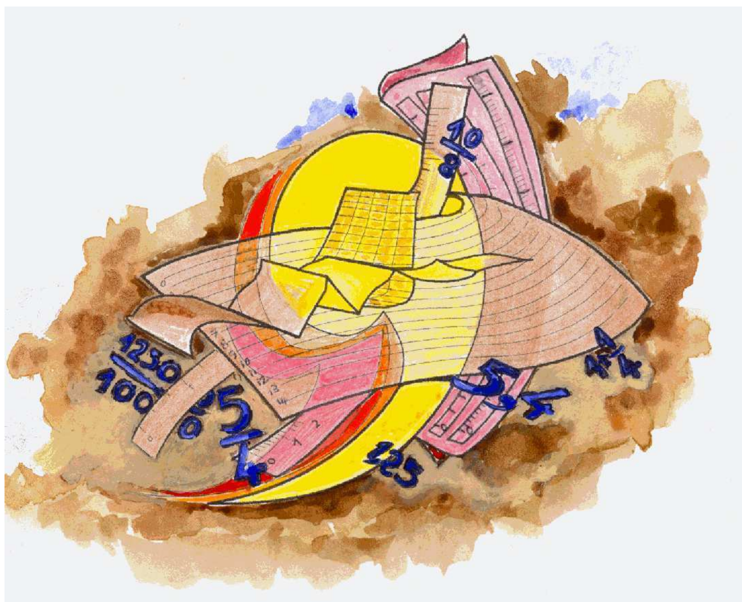
LA SIXIEME ENTRE FRACTIONS ET DECIMAUX



Bernard **ANSELMO**

Monique **BONNET**

Alain **COLONNA**

Georges **COMBIER**

Jacky **LATOUR**

Paul **PLANCHETTE**

Mise en page : Bernard **ANSELMO**

Illustrations : Paul **PLANCHETTE**

LA SIXIEME ENTRE FRACTIONS ET DECIMAUX

Bernard **ANSELMO**
Monique **BONNET**
Alain **COLONNA**
Georges **COMBIER**
Jacky **LATOUR**
Paul **PLANCHETTE**

Mise en page : Bernard ANSELMO

Illustrations : Paul PLANCHETTE

Lyon, novembre 99 (réimpression 2012)

Préface

Le statut des nombres dans les programmes actuels de mathématiques n'est pas bien défini. De nouvelles écritures sont introduites, les élèves apprennent peu à peu à s'en servir, les problèmes et les exercices proposés doivent montrer leur utilité, permettre d'explorer les propriétés des opérations...

Ainsi, en quatrième, les élèves apprennent à utiliser la touche $\sqrt{\ }$ de leur calculatrice, et c'est seulement en troisième que doit être justifiée la nécessité de ce nouveau symbole à l'occasion d'une "première synthèse sur les nombres".

Pour un élève entrant en sixième, les seuls "vrais nombres" sont les nombres entiers. Il a appris à écrire 3€50 sous la forme 3,50€ et 2m54cm sous la forme 2,54m sans y voir nécessairement l'introduction de nouveaux nombres, pour lesquels certaines propriétés des entiers ne seront plus valides. En effet, c'est surtout à l'occasion de la multiplication et des problèmes multiplicatifs que l'introduction des décimaux amène de véritables changements. Or il revient désormais aux enseignants de sixième de mettre en place la multiplication des nombres décimaux.

Peut-on faire l'économie de poser explicitement la question de l'extension de la notion de nombre ? Si la réponse est non, comment l'aborder avec les élèves ?

Le travail qui suit répond clairement à ces deux questions. Son ambition est de donner dès la sixième une base solide à l'emploi des nombres rationnels et en particulier des décimaux, en le fondant sur le problème de la mesure des longueurs. Il propose une démarche d'apprentissage rigoureuse, accessible à tous, pour peu que l'on accepte de ne pas brûler certaines étapes.

Maryvonne Le Berre

SOMMAIRE

PRESENTATION

Depuis 1995, des changements importants ont été introduits dans les programmes du cycle 3 de l'école primaire, le produit de deux décimaux n'y figure plus. La rupture de sens avec le cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, où l'addition réitérée peut être sollicitée pour introduire la multiplication, légitime ce retrait.

Par ailleurs, la maîtrise des décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire. Les résultats nationaux à l'évaluation à l'entrée en $6^{\text{ème}}$ de septembre 1997 font apparaître un score de réussite moyen de 51,4% pour le champ “ numération et écriture des nombres ” où 10 des 11 items ont trait aux décimaux. Le rapport conclut à la nécessité de reprendre en $6^{\text{ème}}$, d'abord du point de vue du sens, l'étude des nombres décimaux.

Les enseignants de $6^{\text{ème}}$ avaient jusque là à prendre en charge les erreurs persistantes, caractéristiques d'une certaine conception du décimal. Les évaluations à l'entrée en $6^{\text{ème}}$ ont contribué à en vulgariser l'analyse. Ils ont également maintenant à enseigner la multiplication des nombres décimaux, tant en ce qui concerne la technique de calcul qu'en ce qui concerne le sens de cette opération.

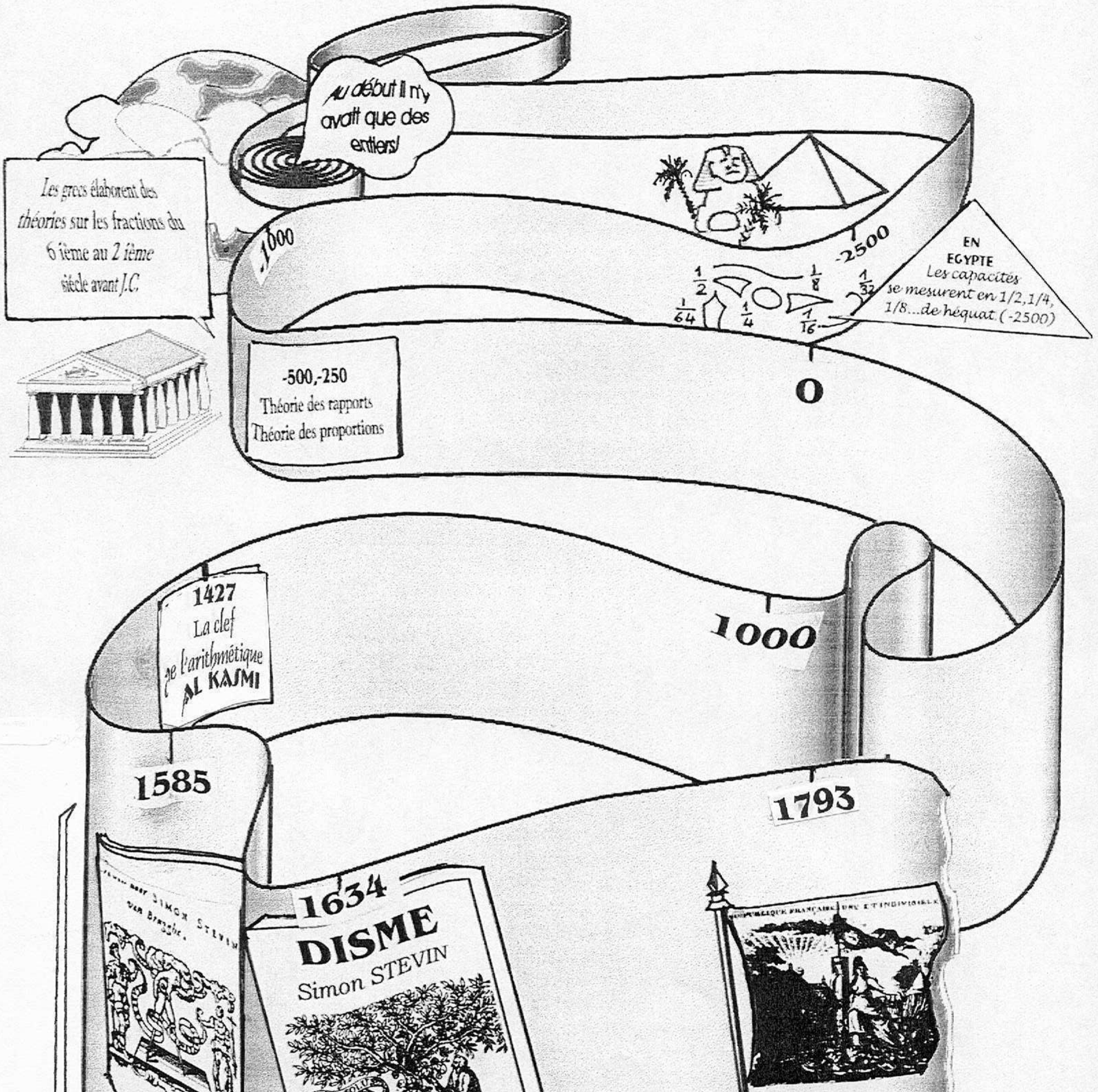
Les travaux de recherche conduits sur l'enseignement des “ fractions ” et des décimaux sont nombreux et importants. Cependant, il existe encore peu de documents, directement utilisables en classe, qui proposent des réponses aux difficultés repérées et prennent en compte les nouveaux apprentissages. Nous avons tenté d’élaborer un tel document.

Cette brochure s'adresse en priorité aux professeurs de collège. Elle met à leur disposition un ensemble de situations pour la classe de $6^{\text{ème}}$ sur le thème “ fractions et nombres décimaux ”, tout en leur permettant de traiter une large part de la partie “ travaux numériques ” du programme. Elle contient également des éléments d'analyse visant à éclairer les choix des auteurs et à aider les enseignants à positionner leur enseignement sur ce thème.

La volonté d'inscrire le travail en $6^{\text{ème}}$ dans la continuité de celui effectué au cycle 3, tant du point de vue de l'approche des nombres décimaux que des méthodes d'enseignement, rend utilisables en cycle 3 certaines des situations proposées ici. Les professeurs d'école trouveront dans cette brochure des éléments de réflexion qui les aideront à situer leur enseignement dans une programmation des apprentissages sur le long terme, allant du cycle 3 de l'école primaire au cycle central du collège.

Cette brochure est l'aboutissement d'un travail de quatre années conduit au sein de l'IREM de Lyon, qui pour cela a bénéficié de moyens accordés par la DLC. Le travail de réflexion et de conception des situations doit beaucoup aux travaux de G. Brousseau, R. Douady, M.J. Perrin et de l'équipe de didactique des mathématiques de l'INRP, dont nous remercions R. Charnay, à qui nous avons emprunté certains documents. Afin d'assurer la reproductibilité du dispositif d'enseignement, les situations ont été expérimentées à plusieurs reprises dans des collèges très différents : zone sensible, zone rurale, collège de centre ville, collège international.

Avant les décimaux il y avait les fractions



Le traité d'Al Kasmi (1427) permettait d'étendre les techniques opératoires des entiers aux fractions décimales.
Il est repris par le hollandais Simon Stevin qui publie la Disme dont la traduction en français paraîtra en 1634.
L'usage des décimaux sera imposé par la convention en 1793

POUR ECLAIRER L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX

I- L'apparition des décimaux dans les mathématiques :

A. Les premières fractions :

C’est très tôt qu’on trouve la trace des fractions dans les civilisations anciennes : en Egypte vers -2500, en Mésopotamie vers -1800 avec les Babyloniens, en Chine vers -1300.

La notion de rapport pour comparer deux grandeurs de même espèce et le partage de l’unité en parts égales pour mesurer des grandeurs avec plus de précision apparaissent simultanément.

Les Egyptiens commencent par diviser l’unité en fractions ayant seulement des puissances de deux comme dénominateur. On a retrouvé par ailleurs des tables de décomposition de fractions en somme de fractions de numérateur 1, ainsi que des tables permettant de prendre des fractions de 1/n. Par exemple : prendre 2/3 de 1/7.

Les fractions sexagésimales (issues de la numération en base 60) inventées par les Babyloniens sont adoptées ensuite par les Grecs et très largement utilisées jusqu’au moyen âge, ce sont les précurseurs de nos fractions décimales.

Les fractions apparaissent ainsi pour la résolution de problèmes concrets, mesurage pour retracer des terrains en Egypte après les crues du Nil, mesures de quantités et calculs pour les échanges commerciaux... ; mais les calculs deviennent rapidement très complexes.

B. Les mathématiciens inventent les décimaux :

C'est avec les savants grecs, notamment les Pythagoriciens et Euclide, que les fractions deviennent des objets d’étude. Puis le calcul numérique et l’algèbre se développent en relation avec les progrès en géographie et en astronomie. Les mathématiciens arabes notamment jouent un rôle important pour l’apparition des décimaux : c’est en cherchant à donner une approximation de la racine irrationnelle d’une équation qu’Al Samaw’al (en 1172) utilise des fractions décimales. Al Kashi publie ensuite (en 1427) une méthode de décomposition d’une fraction en une somme (finie ou non) de fractions décimales. Il établit alors que les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur des entiers en utilisant les fractions décimales.

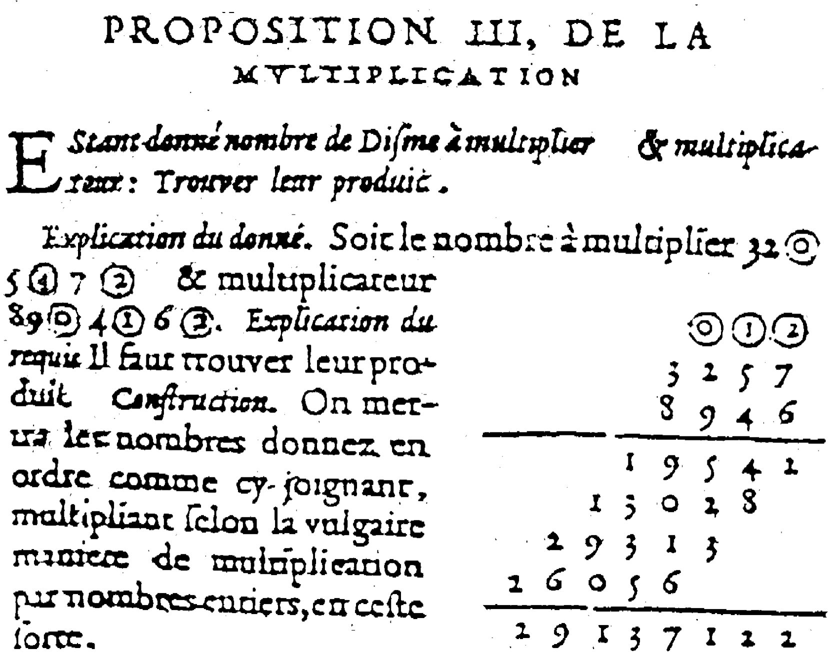
En Europe, les mathématiciens utilisent généralement le système sexagésimal pour diviser l'unité. Ils n’adoptent les décimaux qu’à partir du $16^{\text{ème}}$ siècle. Les publications de François Viete et surtout *La Disme* de Simon Stevin, ingénieur hollandais, permettent la diffusion de l’écriture décimale qui se révèle un outil puissant.

Contrairement aux fractions, les décimaux apparaissent donc à partir d'études mathématiques théoriques pour devenir ensuite un objet d'usage courant.

- Ils permettent de faciliter les comptes en généralisant les techniques opératoires des entiers aux décimaux.
- Ils permettent d’envisager un système de mesures qui ne soit pas dissocié des techniques de calcul.

C'est ce côté pratique qui va imposer leur utilisation. En effet, en France, jusqu'à la révolution, il n'y a pas de lien simple entre les unités de longueur, de surface et de volume, leurs subdivisions restent des fractions non décimales, les unités de masse varient selon les objets, et tout cela diffère encore suivant les régions.

En 1793, la Convention décide d'uniformiser les unités de “ poids et mesures ” et vote l’établissement du système métrique ; en même temps le rapport décimal est retenu pour diviser et sous diviser les nouvelles unités. Ce système est adopté par la plupart des pays. Seule la tentative du calendrier révolutionnaire avec ses subdivisions décimales échoue (les exercices de conversions heures-minutes-secondes sont un héritage des fractions sexagésimales des babyloniens).C'est ainsi que les décimaux se popularisent rapidement, même si les nouvelles unités sont parfois imposées autoritairement.



PROPOSITION III, DE LA MVLTIPLICATION

Estant donné nombre de Disme à multiplier & multiplicateur: Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⓪ 5① 7② & multiplicateur 89⓪ 4① 6②. Explication du requis. Il faut trouver leur produict. Construction. On mettra les nombres donnez en ordre comme cy-joignant, multipliant selon la vulgaire maniere de multiplication par nombres entiers, en ceste sorte.

```
        ⓪①②
        3 2 5 7
        8 9 4 6
     ----------
      1 9 5 4 2
    1 3 0 2 8
  2 9 3 1 3
2 6 0 5 6
---------------
2 9 1 3 7 1 2 2
```

Dans la Disme, Simon Stévin n’utilise pas la virgule.⓪①②③④
La partie entière du nombre est suivie de ⓪ , le chiffre des dixièmes par ①, celui des centièmes par ②, …

3①7②5③9④ est l’écriture de $\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{10000}=0,3759$

51⓪5①9③ est l’écriture de $51+\frac{5}{10}+\frac{9}{1000}=51,509$

II- A quoi servent les décimaux aujourd'hui ?

Les nombres réels pallient l’insuffisance des entiers naturels dans la mesure des grandeurs continues, et les rationnels permettent d’approcher d’aussi près qu’on le veut ces nombres réels. En revanche, les manipulations sur les rationnels, aussi fréquentes qu’utiles comme l’addition et le rangement, ne sont pas commodes en écriture fractionnaire, et ce type d'écriture rend difficile l’exercice d’un contrôle rapide de l’ordre de grandeur d’un résultat. Les décimaux ont l’avantage de permettre également d’approcher d’aussi près qu’on veut les réels, tout en étant beaucoup plus faciles à utiliser pour les calculs, pour les comparaisons, ainsi que pour le contrôle de l’ordre de grandeur d’un résultat. La définition d’algorithmes commodes leur a assuré une large diffusion : dans la vie quotidienne, où avec quelques précautions on calcule sur les décimaux comme on calcule sur les naturels, et dans de nombreuses disciplines, où ils sont employés pour rendre compte de mesures.

III- Conséquences pour l'enseignement

Deux usages sont donc faits des décimaux, qui relèvent de conceptions différentes et qui parfois interfèrent :

a) l'utilisation courante du décimal relève de la conception du décimal comme codage d'une mesure faite avec deux unités différentes. On considère le décimal comme une juxtaposition de deux entiers.
   exemple: 3 m 25 cm = 3,25 m ou 4 F 50c = 4,50 F
b) l'utilisation dans le domaine mathématique relève de la conception du décimal comme code d'une fraction décimale, ce qui permet notamment d'effectuer des calculs d'aires, d'interpréter des données statistiques ou d'approcher aussi près que l'on veut un réel.

L'enseignement se doit de prendre en compte ces deux aspects : social et mathématique.

D'où des objectifs possibles pour le collège :

- savoir interpréter et utiliser des nombres décimaux dans des situations relevant de la mesure ;
- savoir interpréter et utiliser des nombres décimaux dans des situations relevant de la proportionnalité et des statistiques (échelle, pourcentage, fréquence, indice) ;
- savoir recourir selon le cas à une valeur exacte ou une valeur approchée.

Plusieurs points de vue sont ainsi à aborder sur le décimal :

- le nombre décimal outil pour la mesure des grandeurs (recodage de mètres + centimètres ou Francs + centimes) ;
- le nombre décimal codage d'une fraction décimale ;
- le nombre décimal quotient exact " qui se termine " par opposition au non-décimal " qui ne se termine pas " ;
- le nombre décimal valeur approchée d'un réel : on peut approcher ce réel d'aussi près qu'on le veut ;
- entre 2 décimaux, il y en a toujours un autre.

IV- L'évolution des programmes : bref historique

On peut relever succinctement différentes approches des décimaux dans les programmes scolaires successifs :

- *en 1923, “ rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers ” ;*
- *en 1945, “ il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques ” ;*
- *en 1970, “ l’approche (...) des concepts fondamentaux, abstraits par nature (...) demeure résolument concrète ” ;*
- *en 1980, on note la nécessité de disposer de "nouveaux nombres" , autres que les entiers. “ Les nombres décimaux (nombres qui peuvent aussi s’écrire sous forme de fractions décimales) permettent d’approcher d’aussi près qu’on le veut les nombres non décimaux ” ;*
- *en 1991, “ l’élève doit être capable de donner la signification de chacun des chiffres composant un nombre à virgule, de passer, pour un nombre décimal, d’une écriture à virgule à une écriture fractionnaire décimale (et réciproquement) et aussi d’intercaler des décimaux entre 2 nombres donnés ”.*

Le souci d’efficacité a imposé l’usage des décimaux mais il a aussi induit une approche concrète dans les programmes d’enseignement à partir de mesures de grandeurs. Cette approche est en train d'évoluer depuis 1980 vers une approche donnant plus de sens théorique à la construction du décimal.

Cette évolution n'est pas un hasard, elle est la conséquence d'une évolution de la société et de ses besoins.

Jusqu'au milieu du 20ème siècle, la société française est essentiellement rurale. L'étude des décimaux se fait à partir des unités de longueurs, poids, distances, monnaies... qui sont alors leurs seuls domaines d'utilisation pour la quasi totalité de la population. La conception de juxtaposition de deux entiers est pratique et suffisante.

Le passage à la société actuelle a fait apparaître d'autres besoins :

- la compréhension et l'utilisation des résultats statistiques, des pourcentages, des coefficients divers exprimés avec des décimaux et sans unité... ;
- l'interprétation des résultats donnés par les calculatrices (donner une valeur approchée à partir du nombre affiché...) ;
- la nécessité de former un grand nombre de techniciens, ingénieurs...

L'allongement de la scolarité a par lui-même rendu nécessaire l'approfondissement de l'étude des décimaux pour la compréhension des contenus enseignés.

Ces changements ont contribué à reconsidérer l'approche de l'écriture décimale en cherchant à lui donner plus de sens et en insistant sur la compréhension de sa construction. Ils témoignent de la difficulté de la notion de décimal qui génèrent des erreurs persistantes.

V- Des erreurs classiques à propos des décimaux

Les évaluations montrent chaque année que les connaissances concernant les nombres décimaux ne sont pas stabilisées pour plus d'un tiers des élèves de sixième. Une note de service intitulée Mathématiques : articulation école-collège publiée dans le B.O. du 5 décembre 1996 (n°44) précise que ce domaine est sans doute le plus sensible pour ce *qui concerne l'articulation entre école primaire et collège.*

A. Les erreurs classiques les plus répandues :

Ces erreurs sont dues à la conception qu'un décimal est égal à deux entiers accolés. Ceci a des conséquences sur le rangement des décimaux, dans les opérations, dans les dénominations des chiffres (centaines, dizaines, unités, centièmes, dixièmes, millièmes), dans la multiplication ou la division par 10, 100, 1 000.)

Exemples :

- 3,5 < 3,47 car 47 >5 ; .2,3 × 5,2 = 10,6 car 2 multiplié par 5 donne 10 et 3 multiplié par 2 donne 6 ; 7,2 + 2,9 = 11,11 ou 3,15 - 2,7 = 1,8
- 28,5 × 100 = 28,500 ou 28,5 × 100 = 2800,5 ou 28,5 × 100 = 2800
  Pour la première erreur l'élève ne tient pas compte de la virgule. Pour la seconde, il multiplie la partie entière par 100. Pour la troisième il considère la partie décimale comme “ un petit quelque chose ” négligeable (comme les centimes).
- 20,05 : 100 = 0,25
  Pour cet élève les zéros de la partie décimale sont inutiles.

Certaines de ces erreurs peuvent s'expliquer par la méthode d'apprentissage, en particulier si les décimaux sont introduits par changement d'unité, en relation avec le système métrique : 5,14 devient alors une autre écriture de 514 (lorsqu'on choisit le mètre comme unité à la place du centimètre), ou une écriture simplifiée de l'écriture 5 m 14 cm).

B. Des erreurs qui nous paraissent normales à l'entrée au collège :

- Tout nombre possède un successeur ; après 3,5 il y a 3,6 et entre deux nombres décimaux “ consécutifs ” il n'y a rien. 0,1 devient “ le plus petit ” des décimaux.
- Il est impossible de multiplier par un décimal : “ un nombre de fois pas entier, ce n'est pas un nombre de fois ”.
- La valeur exacte d'un quotient, c'est l'écriture décimale qui a beaucoup de chiffres après la virgule : un nombre important de chiffres après la virgule permet de donner la valeur exacte d'un quotient notamment si c'est la calculatrice qui l'affiche.

C. Des règles-élèves fausses mais performantes :

Les travaux de C. Grivard et F. Léonard ont permis d'identifier trois règles-élèves pour ranger trois nombres 4,3 ; 4,249 et 4,06.

- La première consiste à appliquer aux parties décimales, la règle de comparaison des entiers (4,3 < 4,06 < 4,249).
- La deuxième : le plus petit nombre est celui qui a le plus grand nombre de chiffres après la virgule (4,249 < 4,06 < 4,3).
- La troisième : le plus petit des nombres est celui dont le premier chiffre après la virgule est un zéro (4,06 < 4,3 < 4,249 application des règles 3 puis 1).

Ces conceptions fausses permettent pourtant à certains élèves d'avoir un taux de réussite important. L'application des règles 3 puis 2 permet de classer sans erreur les nombres suivants : 2,06 - 2,19 - 2,184.


Il vous reste 0,2 heure
pour finir votre travail !
J'ai encore
20 minutes
Plus que 2 minutes!
Voyons
ce qu'elle a écrit

LES NOMBRES DECIMAUX DANS LES PROGRAMMES ACTUELS

Les programmes de 1995 tentent d'apporter des éléments de réponse aux erreurs révélées par les évaluations 6ème depuis 1989 ; certaines de ces erreurs sont imputables aux choix effectués pour introduire les nombres décimaux. Ils marquent un allongement de la durée d'enseignement consacrée à cette notion, renvoyant au collège l'introduction de la multiplication de deux décimaux, et reportent en 5ème la maîtrise de la technique opératoire de la division d'un décimal par un décimal. A l'école primaire, ils suggèrent de travailler sur les fractions simples et les fractions décimales, avant d'introduire l'écriture à virgule.

La note de service “ articulation école-collège ” accorde une large place à l'enseignement des nombres décimaux en pointant :

- les aspects généraux à mettre en place concernant ces nombres ;
- les aspects qui ont déjà fait l'objet d'un travail au cycle 3 et qui doivent être consolidés en 6ème en assurant la continuité des apprentissages ;
- les aspects qui sont nouveaux en 6ème et pour lesquels il y a rupture de sens avec les conceptions précédemment installées.

I. Les fractions et les décimaux de l'école au collège

	cycle 3	6ème	5ème	4ème
Signification	• Fractions simples *(demi, tiers, quart, fractions décimales).* • Nombres décimaux : écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à une autre.	• Utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens. • Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et inversement. *(Les écritures fractionnaires et décimales pourront être utilisées comme moyens de contrôle mutuel des opérations sur des nombres décimaux).* • Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples *(les activités poursuivies en 6ème s'appuient sur 2 idées : a/b est un nombre, le produit de a/b par b est égal à a).* • extension (de a/b) aux nombres décimaux *(cette extension permettra d'élargir la division au cas où le diviseur est décimal).*		
Numération	• Ecriture, comparaison de fractions de même dénominateur. • *Connaître la signification de chacun des chiffres de l'écriture à virgule d'un nombre décimal.* • Ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement). • *Intercaler des entiers ou des décimaux entre deux nombres donnés.* • *Multiplier ou diviser un décimal par 10, par 100, par 1000, Multiplier un entier par 0,1 et par 0,01.*	• Multiplier un décimal par 10 ; 100 ; 1000 ; ou par 0,1 ; 0,01 , 0,001. • Ranger des nombres donnés en écriture décimale. • Sur une droite graduée : lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement, situer un point d'abscisse donnée. • Reconnaître dans des cas simples, que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.	• Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans les cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans les cas où le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre. *(La simplification, abordée en 6ème, sera l'occasion d'obtenir des fractions irréductibles, mais aucune compétence n'est exigible. La notion de fraction irréductible est envisagée en 3ème).*	• Notation scientifique des nombres décimaux. → sur des exemples numériques, écrire un nombre décimal sous différentes formes faisant intervenir des puissances de 10 ; → utiliser la notation scientifique pour obtenir un encadrement ou un ordre de grandeur. • Comparer 2 nombres relatifs simples en écriture décimale ou fractionnaire.

	cycle 3	6ème	5ème	4ème
Calcul	• Pratique du calcul exact et approché en utilisant : → les techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication et division d'un décimal par un entier) ; → le calcul réfléchi (mentalement ou à l'aide de l'écrit) ; → l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée). • Problèmes relevant de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division d'un décimal par un entier, de la division décimale de deux entiers.	• Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique. *(la multiplication des décimaux est une nouveauté de la 6ème tant du point de vue du sens que de la technique).* *Les opérations +, -, x, sur les nombres en écriture fractionnaire sont rencontrées dans le seul cas où les dénominateurs sont des puissances de 10.* • Effectuer dans des cas simples la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier. *(Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux).* • Procédés de calcul approché (troncature et arrondi à l'unité, ordre de grandeur d'un résultat).	• Multiplication en écritures fractionnaires. • Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est un entier. • Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans les cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre. *(La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en 4ème).*	• Déterminer une valeur approchée du quotient de 2 nombres décimaux (positifs ou négatifs). • Utiliser sur des exemples numériques simples : $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ où a, b, c, d sont des nombres décimaux relatifs. • Calculer la somme de deux nombres en écriture fractionnaire. • Ecrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient, racine carrée …).
Mesure	• Unités de mesure : → Pour les longueurs et les masses, unités du système métrique ; → Pour les aires et les volumes : cm², dm², m², km², cL, dL, L. • *Effectuer des calculs simples.* • Conversions d'unités : → entre unités usuelles de longueur, de masse ; → entre unités légales et usuelles (entre ha et m²).	• Effectuer pour les longueurs et les aires, des changements d'unités de mesure.	• Effectuer pour les volumes, des changements d'unités de mesure.	

Deux textes de référence : programme, complété par *compétences*, pour l'école primaire ; programmes et *commentaires* pour le collège.

II. Articulation école-collège

(Extrait de la note de service, B. 0. 05/12/96)

Nombres décimaux : écriture et opérations

Ce domaine est sans doute l'un des plus sensibles pour ce qui concerne l'articulation entre école primaire et collège.

A l'école primaire, seules quelques fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) sont utilisées par les élèves, et éventuellement travaillées plus longuement dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales. C'est seulement en sixième qu'on se propose d'étendre la signification de l'écriture fractionnaire et de lui donner un statut de nombre. L'approche des écritures fractionnaires reste donc très modeste à l'école primaire : ni les calculs, ni les comparaisons, ni les équivalences ne sont l'objet de compétences attendues.

La maîtrise des nombres décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire. Le sens même de l'écriture à virgule (signification de chaque chiffre en fonction de sa position) est repris en sixième, pour assurer une bonne compréhension des règles de comparaison et des calculs. Plusieurs aspects sont à mettre en place concernant les nombres décimaux : l'écriture à virgule est une autre écriture des fractions décimales (sens de 1/10, 1/100,...), les décimaux sont un bon outil pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect important pour la comparaison, l'encadrement, les approximations...), les décimaux permettent d'approcher les quotients de deux entiers,...

Ces différents aspects sont en général travaillés dès l'école primaire, l'introduction par les fractions décimales étant aujourd'hui la plus fréquente.

Au cycle 3, dans un premier temps, les écritures décimales sont introduites et mises en relation avec leurs décompositions en fractions décimales. Elles sont utilisées pour graduer la droite numérique, ce qui offre un support pour les questions relatives à l'ordre sur les nombres décimaux (comparer, ranger, intercaler). Les élèves sont capables d'additionner et de soustraire deux nombres décimaux. Ensuite, les décompositions utilisant 0,1 ; 0,01 ; ... sont étudiées. L'algorithme de comparaison de deux décimaux est mis en place et utilisé pour résoudre des questions où il s'agit par exemple d'encadrer un nombre décimal à un dixième, un centième,... près. Les nombres décimaux sont également utilisés dans des problèmes de division prolongée au-delà de la virgule (problèmes de partage de longueurs, par exemple), sans que pour autant l'écriture fractionnaire ne soit introduite pour désigner le quotient. Les élèves sont capables de calculer le produit et le quotient d'un décimal par un entier.

En sixième, les différentes significations des nombres décimaux sont reprises, le quotient a/b acquiert le statut de nombre qui peut être approché par un décimal ; les élèves étudient le produit et le quotient de deux décimaux (le programme de 6ème indique qu'il convient de prolonger l'écriture fractionnaire à des cas comme 5,24/2,1 = 524/210, mais qu'aucune compétence n'est exigible quant à la division dans le cas d'un diviseur décimal).

Des changements importants sont introduits dans le programme du cycle 3 de l'école primaire, puisque, après la disparition du calcul du quotient de deux décimaux en 1980, celui du produit de deux décimaux ne figure plus dans les programmes de 1995. En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux, aussi bien pour ce qui concerne la technique de calcul que pour ce qui concerne le sens (reconnaissance des situations où intervient le produit de deux décimaux). Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.

Bien que le travail concernant le produit de deux décimaux ne figure pas au programme de l'école primaire, les élèves auront pu être confrontés à des problèmes du type :

- calcul de "l'aire du rectangle" ou du "périmètre du cercle" (compétences inscrites dans le programme du cycle 3), en ayant alors recours à la calculatrice ;
- recherche du "prix de 3,5 kg de fromage à 10,60€ le kg" où ils auront pu utiliser des procédures personnelles, par exemple liées à la proportionnalité (calcul du prix de 3 kg, puis du prix de 500 g considéré comme un demi-kg).

NOS CHOIX D'ENSEIGNEMENT

I. Les conceptions que nous souhaitons développer

- ***L'écriture décimale est un codage d'une fraction décimale*** *(comme somme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1).* Ce choix respecte l'approche historique et les méthodes préconisées en primaire pour l'apprentissage des décimaux. Il trouve sa justification dans la perspective d'une poursuite d'études (notamment pour toutes les questions de calcul approché), ainsi que dans la perspective de la formation du citoyen où la conception très commune du décimal comme juxtaposition de deux entiers devient un obstacle à la construction de sens (comprendre par exemple, ce que représente un taux de natalité de 1,8 par femme sollicite la fraction proportion où 1,8 renvoie à $\frac{18}{10}$ pour traduire 18 pour 10).

  Il nous fallait donc préalablement aux décimaux, travailler de façon approfondie la notion de fraction.

- ***La notion de fraction relève, en sixième, de plusieurs aspects*** :
  - la fraction ***partage d'un objet*** (c'est celle que connaissent généralement les élèves de CM2) : 2/3, c'est « je coupe 1 bande ou 1 tarte en 3 et j'en prends 2 parts ») ;
  - la fraction ***repérage*** (abscisse d'un point sur une demi-droite graduée) ;
  - la fraction ***partage d'une collection d'objets*** (2/3 d'objet est la part que chacun obtient lorsque l'on partage 2 objets identiques entre 3 personnes) ;
  - la fraction ***quotient*** (2/3 est le nombre qui multiplié par 3 donne 2).

L'aspect fraction ***proportion*** (2/3 c'est 2 pour 3, comme 20 pour 30, comme 10 pour 15 ….) n'est pas dévellopé dans cette brochure.

- ***La multiplication de deux décimaux*** se construit autour de la proportionnalité et du calcul d'aire. Cela représente pour les élèves une rupture de sens dans leurs connaissances : jusqu'à maintenant, la multiplication n'était qu'une addition réitérée (3 fois 6,8 = 6,8 + 6,8 + 6,8) ; cette conception n'est plus opératoire quand il s'agit de multiplier deux décimaux (on n'a plus un « nombre de fois » entier).

II. Nos hypothèses d'apprentissage

Notre stratégie d'enseignement est basée sur la construction du sens de la notion par l'élève lui-même.

Nous proposons donc des **situations-problèmes**, qui visent à faire prendre conscience à l'élève de ses conceptions fausses ou insuffisantes et à présenter un outil nouveau comme plus performant que les anciens.

Nous accompagnons ces situations :

- d'institutionnalisations sous forme de résumé de cours, inscrit sur le cahier : le professeur fixe ainsi les savoirs et savoir-faire élaborés dans les situations ; c'est une première décontextualisation ;
- d'exercices spécifiques ou à choisir dans les manuels : ils aident à sortir du cadre matériel, visent à la généralisation et à l'automatisation ;
- de contrôles qui eux aussi participent à la décontextualisation, à la généralisation, et à l'automatisation : cela participe du rôle formateur de l'évaluation.

Il est cependant nécessaire de ménager pour l'élève des moments de pause dans la succession de ces situations pour qu'il ait le temps de reconstruire ses connaissances et de prendre du recul par rapport à celles-ci. En particulier, l'élève en difficulté a du mal à sortir du cadre matériel.

Si nous voulons que les élèves soient acteurs de leurs apprentissages, il est nécessaire de prendre appui sur leurs connaissances antérieures.

Ce qu'on peut attendre d'un élève à l'entrée en 6ème :

Les notions maîtrisées :
- les entiers, pourvu qu'ils soient assez petits ;
- les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, dans leur conception de fraction partage ;
- la demi-droite graduée à l'aide d'entiers ;

ce qui est en cours d'acquisition :
- les fractions, qui ne sont connues qu'avec des dénominateurs très simples, uniquement comme fractions partages ;
- la notion d'unité : elle n'est pas claire pour les élèves ;
- la notion d'aire (ce qui nous fera repousser dans le temps l'utilisation des fractions d'aires) ;
- la notion de division ;
- la notion de décimal ;
- la notion de proportionnalité.

III. Nos objectifs d'apprentissage

L'étude des décimaux amorcée en primaire se poursuit tout au long du collège.

De notre point de vue,

plusieurs significations ou rôles du décimal sont à mettre en place au collège :
- codage d'une somme d'un entier et de fractions décimales (sens de 1/10 ; 1/100) ;
- repérage de point sur la droite numérique (aspect important pour comparaison, encadrement, approximations, mesures de grandeurs…) ;
- approche de quotient et plus généralement, d'un réel ;

pour que nos élèves sachent :
- faire la différence entre valeur exacte et valeur approchée d'un nombre ;
- qu'il y a une infinité de décimaux entre deux décimaux ;
- que le décimal approche un nombre rationnel ou réel d'aussi près qu'on en a besoin ;
- utiliser les décimaux pour ranger des nombres ;
- maîtriser la technique des opérations avec des nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication, quotient ;
- maîtriser le sens des opérations dans des problèmes avec des décimaux.

Dans cette brochure qui concerne le niveau 6ème, nous avons visé :
- l'extension de la signification d'une écriture fractionnaire : passer de la fraction partage à la fraction repérage et à la fraction quotient ;
- la notion de décimal comme fraction particulière ;
- la différence entre valeur exacte et valeur approchée ;
- le sens de la multiplication de deux décimaux.

Ces buts sont déclinés en différents objectifs tout au long des situations proposées.

IV. Nos choix pour l'apprentissage

Nous avons voulu concilier le besoin d'une remédiation et la nécessité de la construction de notions nouvelles.

Nous avons choisi :

- d'asseoir le travail sur les fractions en prenant appui sur un concept « maîtrisé » : nous avons commencé par des fractions de longueurs, plutôt que des fractions d'aires. Ceci permet d'une part de faciliter la manipulation de nombres plus grands que l'unité et, d'autre part, d'aborder rapidement la droite graduée, de travailler les écritures équivalentes et de ranger des fractions. Les fractions d'aire sont abordées après que les notions d'aire et de périmètre ont été retravaillées ;
- de solliciter tout d'abord la notion de fraction développée en primaire : partage d'une bande par recours au pliage ;
- d'utiliser le guide-âne pour permettre au élèves d'accéder matériellement à des fractions de dénominateurs complexes (jusqu'à 20), sans recours au calcul ;
- de travailler avec les élèves les critères de la graduation : cela nous permet de mettre toute la classe d'accord sur la notion de « règle graduée » et d'abscisse ;
- de travailler dès le début avec plusieurs écritures d'un même nombre, et de dégager progressivement des règles de production d'écritures équivalentes ;
- de consacrer 2 situations à l'introduction de la fraction quotient. C'est une notion nouvelle difficile à installer car elle se heurte à des obstacles forts : le sens de la division est en cours d'apprentissage et la fraction n'a pas encore le statut de nombre ;
- d'aborder la multiplication des décimaux, toujours à partir des fractions décimales, à l'occasion de la proportionnalité et du calcul d'aire. ;
- de nous appuyer sur des problèmes de « vie courante » pour différencier réponse mathématique (valeur exacte) et réponse au problème (parfois valeur approchée).

V. Les moyens que nous nous sommes donnés

- <u>la gestion de classe</u> : le professeur propose les situations, écoute, observe, fait émerger les différentes méthodes, les points de vue, fait expliciter les démarches, organise le débat, institutionnalise le moment venu.

- <u>la durée d'enseignement</u> : nous prenons le temps de reconstruire des concepts importants, et nous étalons nos 10 situations sur toute l'année, en plusieurs blocs. Le temps d'enseignement total recouvre au moins un tiers de l'année.

- <u>le matériel</u> : nous avons pris le parti de faire manipuler les élèves pour leur faciliter l'accès aux concepts ; l'abstraction n'arrive que progressivement. Les élèves ont à manipuler des bandes de papier, des guide-ânes, etc.… Nous faisons découper et recomposer des surfaces, … Pour le professeur, l'utilisation du rétroprojecteur est indispensable.

Concertation de mathématiques

NOTRE PROGRAMMATION D'APPRENTISSAGE

I. Description

Notre progression s'étale sur toute l'année. Elle est composée de dix situations qui peuvent se regrouper ainsi :

A. Du nombre entier à l'écriture décimale en passant par la fraction (5 situations utilisant les longueurs)

1. des fractions pour mesurer

Cette première situation permet de montrer l'insuffisance des nombres entiers dans la mesure d'une longueur. Elle est l'occasion de revenir sur la notion d'unité, de partage, de fraction d'unité, et sur la signification du numérateur et du dénominateur. Elle fait déjà apparaître que des écritures différentes peuvent désigner une même mesure.

2. un nouvel outil pour partager

Le pliage impose des dénominateurs qui sont des multiples simples de 3 et 2, le guide-âne permet d'introduire des dénominateurs quelconques.

3. fractions et graduations

Il s'agit de construire des outils plus pratiques et plus précis pour mesurer des longueurs et tracer des segments : ce sont des règles graduées. C'est le moment d'installer la notion de droite graduée et d'abscisse.

4. écritures équivalentes

Des écritures équivalentes ont déjà été rencontrées et utilisées en situation 1. Il s'agit maintenant de dégager des règles, pour produire et reconnaître de telles écritures.

5. fractions décimales et nombres décimaux

En partant du cas particulier des fractions décimales et en s'appuyant sur les écritures équivalentes cette cinquième situation permet de revenir sur la signification de l'écriture décimale.

B. La fraction quotient (2 situations introduisant la fraction quotient)

6. division et multiplication

Il s'agit d'assurer une meilleure maîtrise du sens de la division en prenant appui sur la connaissance qu'ont les élèves de la multiplication.

7. fraction quotient

On introduit une notion nouvelle : la fraction comme nombre solution de l'équation $ax = b$ ou comme quotient de deux entiers $a : b$. C'est l'occasion de différencier quotient exact et quotient approché.

C. La multiplication de deux nombres décimaux (3 situations utilisant les aires)

8. fractions de surface

La notion de fraction est réinvestie dans un cadre nouveau.

9. multiplication et aire

Il s'agit d'étendre la formule de calcul de l'aire d'un rectangle au cas des dimensions décimales et d'installer un autre sens à la multiplication de deux décimaux.

10. multiplication et proportionnalité

La proportionnalité est un moyen de donner du sens au produit de deux décimaux. Après avoir défini la multiplication d'un décimal par une fraction, on présente le cas particulier du produit d'un décimal par une fraction décimale.

Les trois parties A, B et C peuvent être utilisées indépendamment l'une de l'autre, mais les situations à l'intérieur de chacune sont fortement liées. En cas de non-respect de la progression il faudra s'assurer de tous les prérequis. En effet, nous avons conçu toutes les situations, en nous appuyant sur les apprentissages et les outils des situations précédentes. Seule la situation 9 peut être déplacée à l'intérieur de la partie C.

II. Articulation avec le programme de sixième en vigueur depuis septembre 1996

Les choix que nous avons faits, imposent d'aborder le programme d'une manière inhabituelle, en tout cas avec une progression qui n'est pas celle des manuels de sixième. Nous renvoyons notamment, la multiplication des décimaux au troisième trimestre.

Le nombre décimal étant le codage d'une fraction particulière, il nous a paru indispensable de faire un travail préalable sur la fraction et d'en aborder les différents aspects.

Les différentes situations d'enseignement que nous avons expérimentées, permettent de travailler sur de nombreuses compétences listées dans le programme de sixième.

Dans la première partie, conformément au programme, les élèves ont appris à :

" - *reporter une longueur ;*

- reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre ;

- graduer une droite ;

- placer les quotients de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples ;

- lire l'abscisse d'un point ;

- placer un point d'abscisse donné ;

- donner l'encadrement de l'abscisse d'un point ;

- utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens ;

- pour les nombres décimaux courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice versa ;

- ranger les nombres en écriture décimale ;

- trouver dans des situations simples le nombre à ajouter ou à retrancher pour obtenir un résultat donné. " [1]

Dans la deuxième partie, alors qu'" à *l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage, les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :*

le quotient $\frac{a}{b}$ *est un nombre,*

le produit $\frac{a}{b}$ *par b est égal à a.*

Cela permet de considérer un nombre tel que $\frac{4}{3}$ *comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.* "

[1] Programme de la classe de sixième dans "Vers un nouveau collège " pages 19, 23 et 25.

“ Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur ; on visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre à travers de multiples activités : repérage (placement sur une droite graduée), mesure, calcul, (possibilité d’utiliser un quotient $\frac{a}{b}$ *dans un calcul, sans effectuer nécessairement la division de a par b). ”* [2]

La troisième partie nécessite d’avoir effectué un travail sur les aires, elle est l’occasion de : “ *- déterminer l’aire à partir d’un pavage simple ;*

- comparer des périmètres, comparer des aires ;

- calculer l’aire et le périmètre d’un rectangle.

On pourra faire déterminer des aires à l’aide de reports, de décompositions, de découpages et de recollements... ”

Enfin : *“ La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de sixième tant du point de vue du sens que de la technique ”* [3].

Comme le montre l’énumération précédente les thèmes abordés sont nombreux et couvrent une large partie du programme (attention la partie technique opératoire n'est cependant pas traitée dans cette brochure). Le travail à engager, tant sur la fraction que sur les décimaux, est important. Pour cela il doit être entrepris très tôt dans l’année et s’inscrire dans la durée. Les bénéfices de cet investissement en 6ème seront recueillis dès la 5ème, puis pendant les années suivantes.

---

[2] Programme de la classe de sixième dans “ vers un nouveau collège ” page 23 dans la colonne commentaires.

[3] Programme de la classe de sixième dans “ vers un nouveau collège ” page 20

PRESENTATION DES SITUATIONS EXPERIMENTEES

Attention !

La photocopie peut parfois modifier les dimensions et être à l'origine de difficultés dans les situations 3 et 4.

Situation 1 : Des fractions pour mesurer

Les élèves arrivent de l'école primaire en n'ayant travaillé pour la plupart d'entre eux qu'une signification de l'écriture fractionnaire, celle de fraction partage : $\frac{3}{4}$ c'est 3 parts issues du partage de l'unité en 4 parts égales. Cette première situation est l'occasion de revenir sur ce statut de la fraction et notamment d'insister sur la nécessité d'effectuer des partages de l'unité en parts égales.

Pour aborder cette situation, il est nécessaire que les élèves sachent reporter des longueurs bout à bout, pour mesurer et tracer un segment.

1) **Durée approximative :** 3 séances de 55 minutes.

2) **Apprentissages visés :**
    - Percevoir l'insuffisance des nombres entiers pour effectuer des mesures.
    - Utiliser une fraction de l'unité pour effectuer une mesure.
    - Décoder une écriture fractionnaire pour tracer un segment.
    - Découvrir que des écritures différentes peuvent désigner une même mesure.

3) **Description de l'activité :**
Les élèves sont répartis en groupes, les groupes étant associés deux par deux. Chaque groupe mesure un segment à l'aide d'une unité donnée et rédige un message pour que le groupe associé colorie, sur une droite déjà tracée, un segment de même longueur.

Attention : Cette situation est très riche mais elle peut surprendre. Elle nécessite une grande préparation matérielle et il n'est pas aisé de gérer les échanges entre des groupes très actifs.

Les situations suivantes font appel à des gestions de classe plus classiques. Leur appropriation et leur mise en place sont plus simples.

4) **Matériel :**

L'utilisation de la règle graduée et des ciseaux est interdite.

Ce choix est fait pour favoriser la construction d'une image mentale de la fraction partage.

L'interdiction de la règle graduée rend impossible un travail sur les nombres. Ainsi si l'unité mesure 21 cm et le segment à reproduire 28 cm, l'élève ne peut pas utiliser le fait que 28 est égal à 21 + 7 et que 7 est égal à 21 : 3. Il est contraint de recourir au pliage de la bande unité.

L'interdiction des ciseaux assure la présence permanente de l'unité, pliable mais non sécable, et la matérialisation du partage de celle-ci en parts égales.

<u>Séance 1 :</u> Pour chaque groupe d'élèves :

- plusieurs bandes unités de largeurs différentes (longueur de l'unité : 21 cm, c'est la largeur d'une feuille au format A4 : $21 \times 29{,}7$) ;

Les bandes unités ont été choisies de largeurs différentes pour que la largeur ne soit pas utilisée comme unité auxiliaire.

- une feuille sur laquelle sont tracés plusieurs segments : feuille 1 (annexe 1) avec les segments A, B, C, D pour les groupes 1, et feuille 2 (annexe 2) avec les segments E, F, G, H pour les groupes 2) ;

Les segments A, B, C, D ont pour mesures respectives : $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{6}$; $1 + \frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{2}$ *; les segments E, F, G, H :* $\frac{2}{3}$; $1 + \frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$ *et* $\frac{5}{6}$.

- une fiche navette, à agrandir au format A3, destinée aux échanges de messages et aux tracés des segments, en réponse aux messages (annexe 3).

<u>Séance 2</u> : Pour la mise en commun :

- plusieurs bandes unités ;
- un transparent de chacune des deux feuilles où sont tracés les segments à reproduire.

Pour chaque élève :

- une fiche synthèse " Des nouveaux nombres pour mesurer " (annexe 4).

Le recours au pliage nous a conduit à choisir une " grande " unité (21 cm) pour que les écarts de mesure entre les différentes fractions de l'unité manipulées soient facilement identifiables.

Nous avons voulu faire manipuler dès le début des fractions supérieures à l'unité. Ceci afin de ne pas renforcer la conception courante qu'une fraction est une partie de l'unité, donc inférieure à 1. L'unité de longueur retenue nous impose de travailler sur des fractions toutes inférieures à 2. Il est toutefois possible d'introduire des fractions plus grandes. Les segments donnés doivent alors être tracés sur une feuille A3. Il faut aussi prévoir de tracer les segments réponses, soit sur une feuille de papier affiche, soit sur un rouleau de papier pour calculatrice imprimante.

Les mesures ont été choisies afin de mettre en évidence certaines erreurs couramment constatées :

- *la confusion entre " un demi " et " un et demi ", favorisée par l'idée qu'entre 0 et 1 il n'y a rien ;*
- *la confusion entre tiers et quart : pour certains, plier une fois en deux puis une seconde fois en deux donne des tiers, et plier une fois de plus en deux donne des quarts.*

5) Déroulement :

Séance 1 : Production et échange de messages

Les élèves sont groupés par 3 ou 4. Les groupes, en nombre pair, sont associés par deux. A l'intérieur de chaque paire ainsi constituée, un groupe est désigné par le n°1, l'autre par le n°2. Chaque groupe dispose d'une série de bandes unités.

• Phase 1 **:** Le professeur conduit collectivement cette phase qui a pour but de rappeler comment on utilise le report d'unités pour mesurer un segment et pour tracer un segment de longueur donnée.

Il affiche au tableau une feuille sur laquelle est tracé un segment de longueur 3 unités. Puis il demande à la classe comment mesurer la longueur de ce segment à l'aide de la bande unité. Il propose alors de tracer, toujours au tableau un segment de longueur 5 unités.

• Phase 2 **:** Le professeur distribue à chaque groupe :

a) une feuille sur laquelle sont tracés 4 segments :

- feuille 1 avec les segments A, B, C, D pour les groupes 1,
- feuille 2 avec les segments E, F, G, H pour les groupes 2.

b) une fiche navette utilisée pour la transmission des messages et la production des segments en réponse à ceux-ci.

> Consigne : " Choisissez un des segments tracés sur la feuille. Vous allez devoir écrire un message pour que le groupe associé au vôtre puisse reproduire un segment de même longueur que celui que vous avez choisi. Il ne disposera pour cela que de la bande unité et des informations contenues dans votre message.
>
> Vous allez ensuite recevoir un message du groupe associé au vôtre. Il vous faudra colorier sur une ligne droite déjà tracée un segment de la longueur indiquée dans le message reçu.
>
> Vous enverrez ensuite le segment que vous avez colorié au groupe qui a écrit le message pour qu'il compare sa longueur à celle du segment qu'il a choisi. Si vous ne comprenez pas le message, vous pourrez utiliser la fiche navette pour demander par écrit des informations supplémentaires au groupe qui a rédigé le message.
>
> L'utilisation de la règle et des ciseaux est interdite. Les messages ne doivent pas comporter de dessin. "

En même temps qu'il donne la consigne, le professeur présentera le matériel. Il insistera sur le fait que tous les groupes ont des bandes unités de même longueur mais de largeurs différentes, que c'est la longueur de ces bandes qui constitue l'unité de longueur. Il précisera que les groupes n'ont pas à se déplacer, que c'est lui qui jouera le rôle de facteur.

Durant cette deuxième phase, le professeur assure les échanges entre les groupes et intervient si nécessaire au sein des groupes pour :

- reformuler la consigne, après avoir demandé aux élèves ce qu'ils pensaient avoir compris ;
- indiquer, en réponse à une demande ou après avoir constaté des difficultés, comment plier une bande unité en trois parts égales ;
- amener à distinguer nombre de plis et nombre de parts ;

- en cas de désaccord persistant, inciter les groupes émetteurs à vérifier leur message et les groupes récepteurs leur tracé ;
- en cas de formulation ambiguë, dire à un groupe émetteur comment lui même interprète leur message…

Par contre, il s'interdit de donner toute indication de procédure, de porter tout jugement sur l'exactitude d'un message, d'un tracé.

Lorsqu'un groupe a colorié un segment en réponse à un message reçu, le groupe émetteur, en présence du professeur, en compare la longueur avec celle du segment qu'il avait choisi. Pour les tracés on acceptera une imprécision de l'ordre de 5 mm.

- En cas de réussite, le professeur invite le groupe émetteur à choisir un nouveau segment sur sa feuille et à engager le même travail.
- En cas d'échec, il en informe les deux groupes qui poursuivent leur travail sur ce même segment. Après plusieurs tentatives infructueuses et avant que les deux groupes ne se découragent et ne se désintéressent de la tâche demandée, il pourra leur demander d'abandonner le travail sur ce segment. Il leur proposera alors d'engager le même travail sur un autre segment choisi sur sa feuille par le groupe émetteur.

Au terme de la première séance, le professeur ramasse les fiches navettes sur lesquelles les groupes émetteurs ont rédigé les messages et les groupes récepteurs ont tracé les segments.

Avant la deuxième séance, pour chacun des segments qui ont fait l'objet d'un message, le professeur aura établi une liste des messages exacts : soit qui ont permis de produire un segment de même longueur, soit qui ont donné lieu à une mauvaise interprétation par le groupe récepteur. Il aura également sélectionné quelques messages erronés, en nombre restreint : ceux qui présentent un intérêt au regard des apprentissages visés (confusion entre “ un demi ” et “ un et demi ”, confusion entre “ tiers ” et “ quarts ” renvoyant au nombre de plis effectués…). En deuxième séance, il communiquera ces messages à ses élèves par les moyens de son choix (transparent, affiche ou polycopié).

Séance 2 : Analyse des messages et institutionnalisation d'écritures fractionnaires

• Le professeur indique aux élèves qu'il a sélectionné pour chaque segment un certain nombre de messages dont la classe va devoir discuter l'exactitude : “ Permettent-ils de tracer un segment de même longueur que le segment choisi ? ”

Le professeur commence par la présentation d'un segment pour lequel au moins l'un des messages produits comporte une écriture fractionnaire. Par exemple pour le segment D on peut envisager avoir l'écriture $\frac{1}{2}$ et pour le segment G une écriture parmi les suivantes : $1+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $3\times\frac{1}{2}$. Au cours de la discussion, les élèves seront conduits à se demander s'il est possible de traduire les autres messages en utilisant des écritures fractionnaires.

Après discussion, le message est validé à l'aide des feuilles 1 et 2 reproduites sur transparents. On réalise le segment correspondant au message, et on compare sa longueur à la longueur du segment choisi.

Le professeur sélectionne les segments qu'il propose à la discussion, en fonction de l'intérêt des messages au vu des apprentissages visés.

- La discussion permet :

- *de* se mettre d'accord sur les pliages qui permettent d'obtenir des demis, des tiers, des quarts, sur la manière de nommer ces parties ;
- d'institutionnaliser le fait qu'une unité vaut 2 demis, 3 tiers, 4 quarts… ;
- de constater qu'il y a plusieurs écritures possibles pour une même mesure, ce qu'on traduit par l'utilisation du signe" = " entre les différentes écritures.

Si des groupes proposent des écritures décimales du type 0,5 pour le segment D ou 1,5 pour le segment G, le professeur peut demander à la classe : “ Est-ce que 0,5 bande unité c'est bien une $\frac{1}{2}$ bande unité ou encore est-ce que 1,5 bande unité c'est bien une 1 bande unité plus $\frac{1}{2}$ bande unité ”. Il peut mettre alors en débat les différents points de vue mais ne pas conclure et renvoyer la réponse à plus tard.

La signification de l'écriture décimale d'un nombre sera abordée plus tard, après qu'auront été introduites les fractions décimales.

- En synthèse de cette situation, les élèves sont invités à compléter la fiche intitulée : “ Des nouveaux nombres pour mesurer ”. Ils collent des bandes unités pliées respectivement en 2, en 3, en 4. Les phrases sont complétées collectivement, de même qu'est traduit sous forme d'égalités le fait qu'il faut deux demis pour avoir une unité : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, trois tiers pour avoir une unité… On poursuit en cherchant à obtenir des quarts, des sixièmes, des huitièmes et on écrit les égalités correspondantes.

On peut compléter la fiche avec un ou deux segments. Les segments seront choisis de manière à ce que les mesures de leurs longueurs s'expriment à l'aide de $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{3}$, de $\frac{1}{4}$, de $\frac{1}{6}$, ou de $\frac{1}{8}$. Les élèves auront à mesurer la longueur des segments et chercher plusieurs écritures de chacune des mesures. Par exemple $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ pour le segment A.

Séance 3 : Entraînement

Le professeur pourra proposer des exercices de types suivants:

- L'unité restant la même, tracer des segments de longueur :

$$\frac{7}{4} \qquad 1 + \frac{2}{3} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{3}{6}$$

Une feuille au format 21 × 29,7 ne permet pas de tracer des segments de longueur 7/4 et 1 + 2/3. On travaille sur une double page ou sur une feuille au format 24 × 32.

- Trouver d'autres écritures de : $\frac{7}{4}$ $\quad 1 + \frac{2}{3}$ $\quad \frac{5}{8}$ $\quad \frac{3}{6}$

L'idée est encore de prendre appui sur la mesure pour construire des connaissances sur les écritures fractionnaires. Pour cette raison il est demandé aux élèves de trouver des écritures de la longueur de segments qu'ils ont tracés pour pouvoir les valider expérimentalement.

Les fractions retenues pour travailler sur les équivalences d'écriture l'ont été de façon à permettre une validation expérimentale. Il pourrait être tentant de proposer à l'issue de cette situation des exercices portant sur addition et soustraction de fractions, ou visant à installer des procédures de reconnaissance de fractions équivalentes et de simplification. On se gardera de le faire car :

- *d'une part l'addition et la soustraction de nombres en écriture fractionnaire autre que décimale ne figurent pas au programme de la classe de 6ème ;*
- *d'autre part, on court le risque de voir les élèves travailler de manière formelle sur les écritures, sans recourir au sens. Ce travail formel sur les écritures, ici prématuré, trouvera sa place au terme de la troisième situation alors que nous aurons renforcé le sens à donner aux écritures fractionnaires.*

- Fabriquer à l'aide de bandes unités : des demis de tiers, des tiers de demis, des demis de quarts, des quarts de demis.

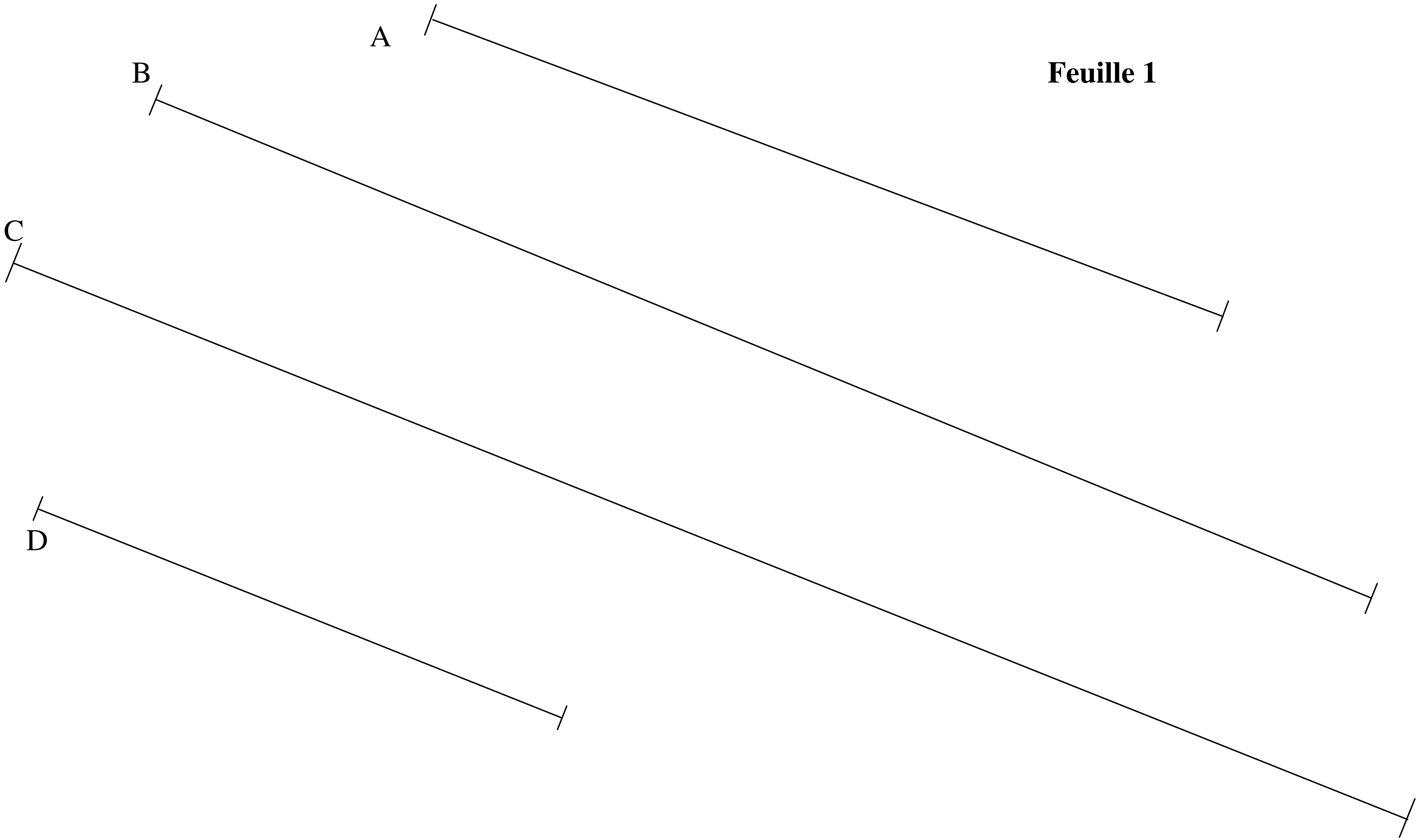
  Nommer chacune des parts ainsi obtenues.

Cet exercice prépare le travail sur les fractions décimales où le centième devra être vu comme la centième partie de l'unité, mais aussi comme étant le dixième d'un dixième.

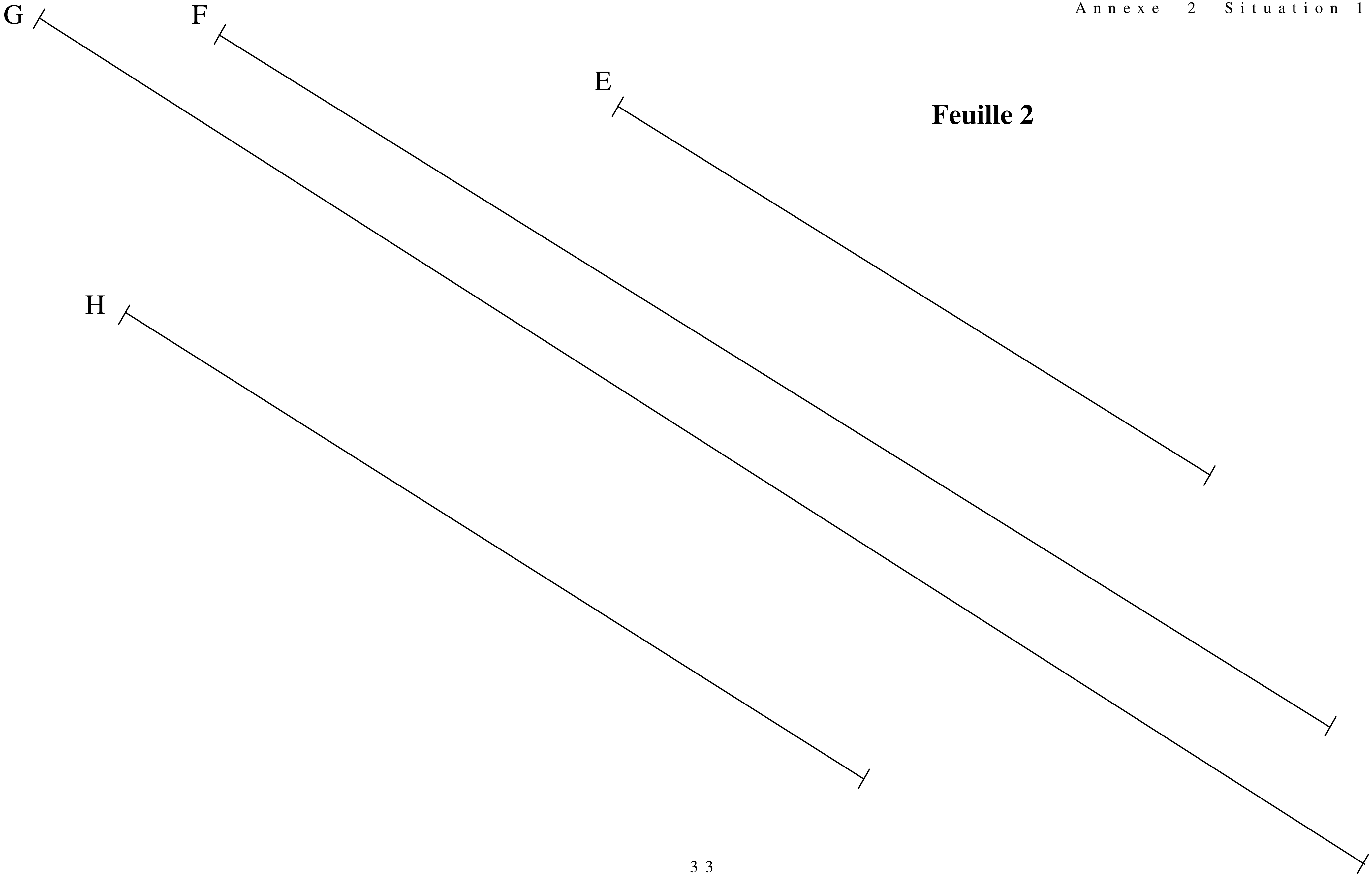
En fin de séance, donner à découper à la maison les bandes figurant en annexe 4 de la situation 2.


Par une matinée ensoleillée du début d'automne
Je n'ai rien oublié, -les bandes, -les feuilles navettes - les unités...
Soyons clair !
Consignes ;
Un peu d'attention : Le groupe 1 me donne sa feuille que je donne au groupe 2 qui me donne sa feuille que je donne au groupe 1.... Pas de question ?
Le pouce de la main droite ou de la main gauche ?
Du 2 au 1, du 7 au 6... Oui qui m'appelle ?
Ca y est ! Je sais plier en trois !...
Pour faire 4 tiers, il faut plier en quatre !
Ils ont mis une unité et un pouce
Y'aurait pas un petit bout de tarte ?
Un professeur plein d'allant joue au facteur dans une ambiance chaude et enthousiaste
Que d'erreurs ! C'est super !
Après une agréable soirée de labeur...
I'm a poor prof solitaire ♪♪♪♪♪
Il repart vaillamment, vers des situations moins mouvementées...

Feuille 1



Feuille 2



FICHE NAVETTE (A agrandir au format A3)

Du groupe : .... **Au groupe : ....**

Message 1 : Pour le segment ,

Réponse ou question :

Message 2 : Pour le segment ,

Réponse (ou question) :

Message 3 : Pour le segment ,

Réponse (ou question) :

Message 4 : Pour le segment ,

Réponse (ou question) :

Message 5 : Pour le segment ,

Réponse (ou question) :

Des nouveaux nombres pour mesurer

Les nombres entiers ne suffisent pas toujours pour mesurer. Il est parfois nécessaire de partager l'unité. On utilise alors des fractions.

I) Partage de l'unité :

a) <u>En 2 parties égales</u>

Les parties obtenues s'appellent ....

b) <u>En 3 parties égales</u>

Les parties obtenues s'appellent ....

c) <u>En 4 parties égales</u>

Les parties obtenues s'appellent ....

d) <u>En 6 parties égales</u>

les parties obtenues s'appellent ....

e) <u>En 8 parties égales</u>

les parties obtenues s'appellent ....

II) Explication des écritures :

$\frac{1}{2}$ c'est l'unité partagée en ... parties égales et je prends ... de ces parties

$\frac{1}{3}$ c'est l'unité partagée en … parties égales et je prends ... de ces parties

$\frac{3}{4}$ c'est l'unité partagée en ... parties égales et je prends ... de ces parties

$\frac{5}{8}$ c'est l'unité partagée en ... parties égales et je prends ... de ces parties.

Situation 2 : Un nouvel outil pour partager : le guide-âne.

Dans la première situation, les élèves ont manipulé des segments dont la longueur s'exprimait avec des fractions de dénominateurs simples (*facilement obtenus par pliage*). Cette situation a pour objet d'introduire un nouvel outil de partage : le guide-âne.

1) **Durée** : 2 séances de 55 minutes.

2) **Apprentissages visés :**

- Partager en parties égales en utilisant un guide-âne.
- Construire un segment dont la mesure est donnée en écriture fractionnaire, l'unité étant fixée.
- Reconnaître une fraction supérieure à 1, inférieure à 1, égale à 1.

3) **Description de l'activité :**

Après avoir justifié l'introduction du guide-âne, son mode d'emploi est présenté. Les élèves l'utilisent ensuite pour construire des segments.

Alors que le pliage contraignait à n'utiliser que des fractions de dénominateurs particuliers simples (2, 3, 4, 6, 8), le guide-âne autorise l'introduction de fractions de dénominateurs quelconques.

4) **Matériel :**

Séances 1 et 2 : Pour chaque élève :

- deux guide-ânes réalisés sur papier blanc, l'un d'espacement 1 cm environ (annexe 1), et l'autre avec un espacement de 0,5 cm environ (annexe 2) ;
- une feuille réponse sur laquelle sont tracées des lignes droites (annexe 3) ;
- quelques bandes unités de 21 cm comme dans la situation 1 et d'autres bandes unités à découper (annexe 4) ; (On pourra donner ces petites bandes en fin de situation 1 pour que le découpage s'effectue à la maison.)

Notons que la longueur d'une bande est de 10,5 cm soit la moitié de 21 cm.

Pour la classe :

- un rétroprojecteur ;
- les deux guide-ânes sur transparents ;
- des bandes unités semblables à celles des élèves, fabriquées avec un transparent ;
- quelques exemplaires du corrigé sur papier calque à tenir à la disposition des élèves.

Le papier calque passe aisément à la photocopie.

5) Déroulement :

Séance 1 : Le guide-âne

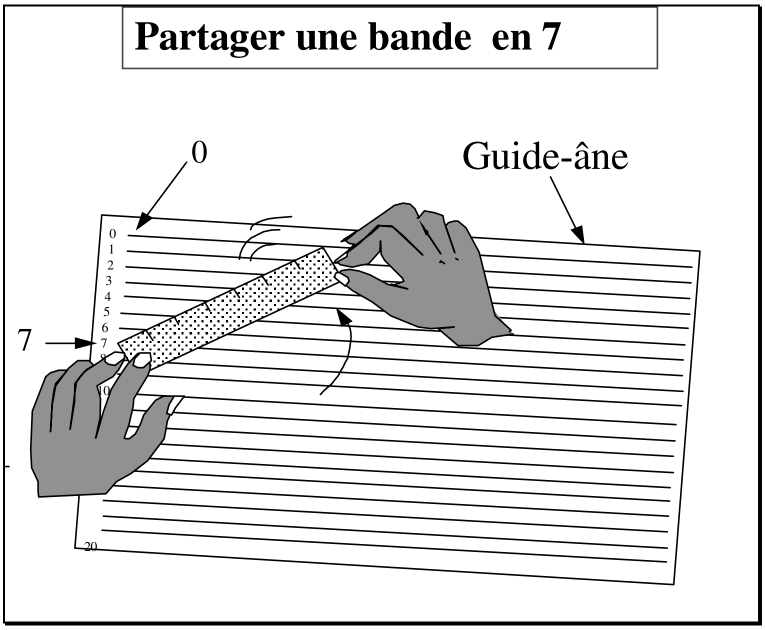
- Justification de l'introduction du guide-âne : difficulté à partager en 5, en 7... en pliant. On propose aux élèves de partager une grande bande unité par pliage.

On espère qu'ils n'y arriveront pas !

- Présentation au rétroprojecteur de l'utilisation du guide-âne :

  La présentation est faite par le professeur.

Pour l'utilisation du guide-âne voir le dessin.



La bande en papier est posée sur le guide-âne et les traits de partage sont marqués perpendiculairement sur le bord de la bande.

- Travail individuel :

  1) On fournit le guide-âne d'espacement 1cm environ (annexe 1), et les grandes bandes unités de la situation 1.

  Les élèves partagent une bande unité et colorient un segment de $\frac{1}{5}$ d'unité sur la feuille réponse (annexe 3).

  La validation se fait à deux par superposition. En cas de désaccord on mettra à la disposition des élèves un calque corrigé. Eventuellement les élèves peuvent valider avec le compas à condition qu'ils ne confondent plus traits et intervalles.

En cas d'échec on reprend la manipulation car il est important que tous les élèves y arrivent avant de poursuivre.

Ce sera aussi l'occasion de fixer nos exigences pour la précision des tracés. En particulier les élèves de sixième repèrent mal les extrémités des segments et font des traits de partage qui suivent les traits du guide-âne plutôt que des traits perpendiculaires au segment ou à la bande.

Certains vont confondre nombre de traits de graduation et nombre de segments : il est important d'intervenir à ce moment là pour que la confusion ne s'installe pas.

2) On propose ensuite, de colorier d'autres segments de longueur $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{11}$ … avec la même unité, puis on passe aux fractions $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{14}{11}$… Les coloriages se font sur la feuille réponse.

Le travail est individuel dans un premier temps puis, si on le juge utile, on peut demander aux élèves qui réussissent bien d'aider ceux qui rencontrent des difficultés.

Séance 2 : Où on change d'unité

les élèves disposent maintenant de nouvelles bandes unités qu'ils auront préalablement découpées (annexe 4) et de la feuille réponse.

Là il s'agit de colorier des segments de longueur : $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{15}{7}$…

Dans un premier temps la construction se fait avec le guide-âne espacé. Ensuite il est demandé de construire un segment impossible à réaliser avec le guide-âne fourni, d'où la nécessité d'utiliser un guide-âne plus serré.

Comme fractions on peut choisir : $\frac{7}{11}$; $\frac{21}{12}$ …

Certains élèves apprennent vite et exécutent très vite leurs exercices, il est donc utile de leur prévoir du travail supplémentaire (construction d'autres segments par exemple).

- Institutionnalisation :

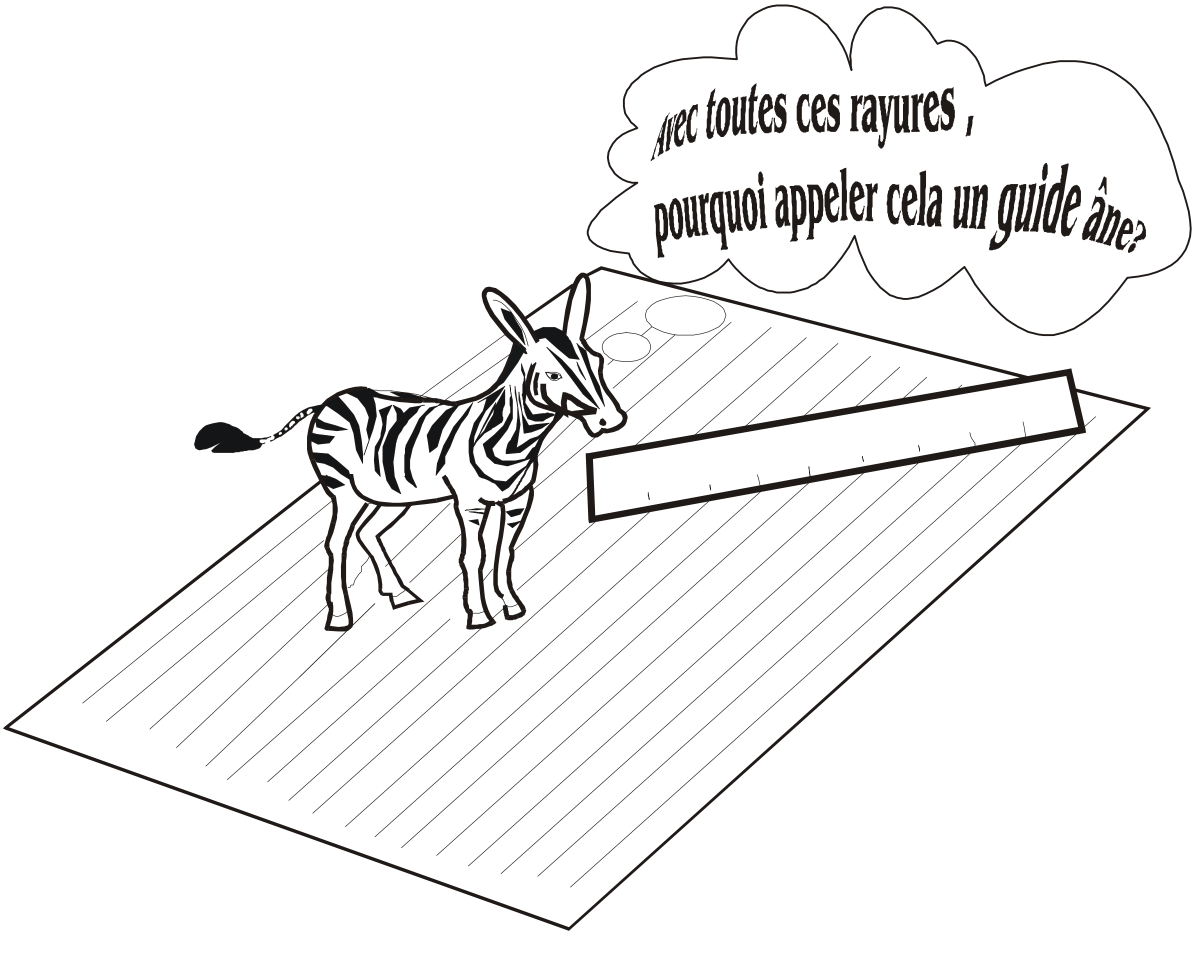
Le professeur propose une liste de fractions et demande de repérer celles qui sont plus grandes que l'unité, celles qui sont égales à l'unité ou plus petites que l'unité.

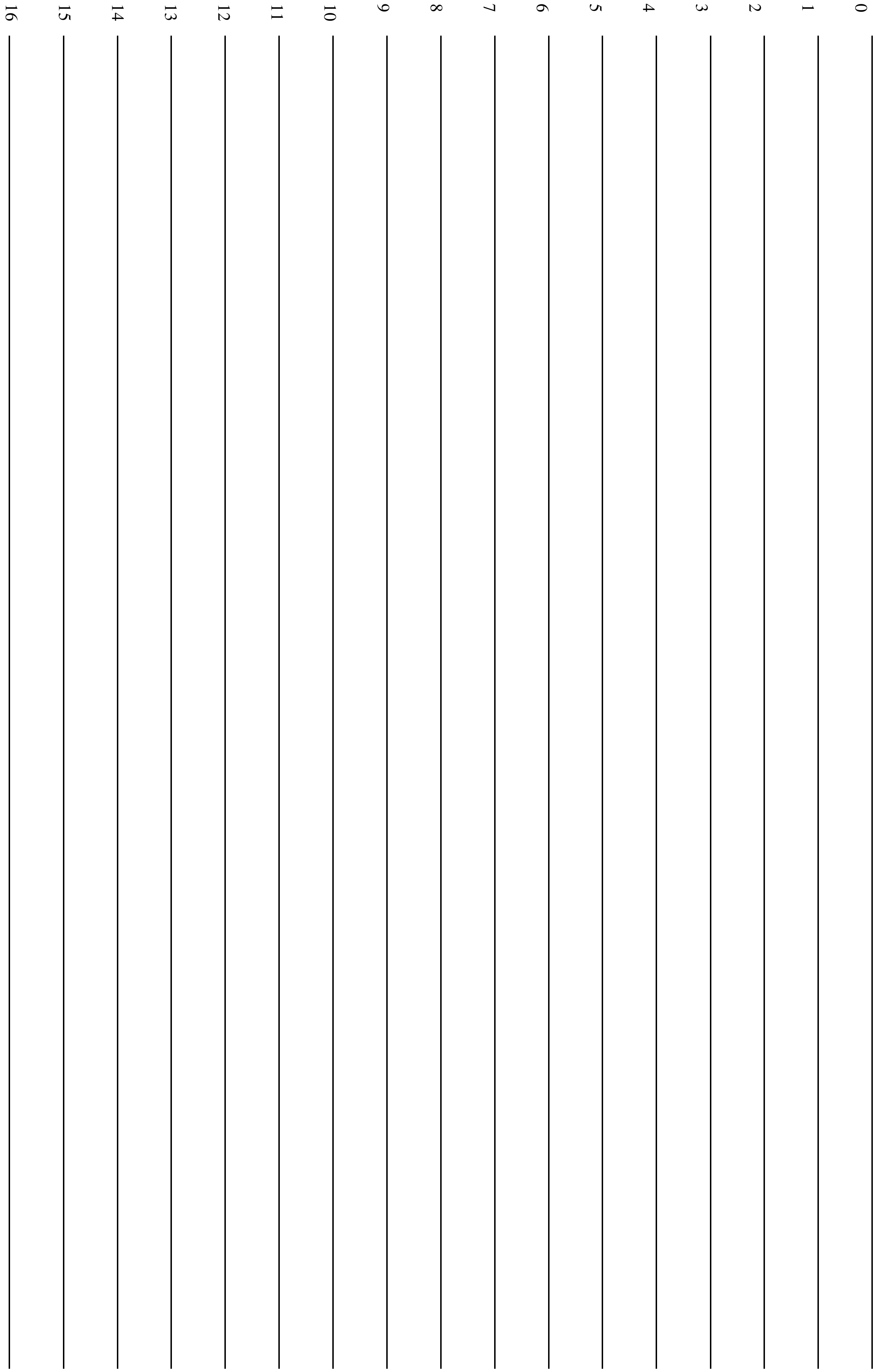
Pour animer cette phase on utilisera un questionnement du type : " Comment le sais-tu ? Qu'est-ce que tu as vu ? Qu'est-ce que tu t'es dit ? "[1]

- ♦ **Une fraction s'écrit avec un numérateur et un dénominateur.**
- ♦ **Si le numérateur est égal au dénominateur, alors la fraction est égale à l'unité.**
- ♦ **Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, alors la fraction est plus petite que l'unité.**
- ♦ **Si le numérateur est plus grand que le dénominateur, alors la fraction est plus grande que l'unité.**

Il est souhaitable de placer l'activité préparatoire de la situation 3 à la fin de cette séance.

[1] Voir la brochure IREM : Pratique de L'Entretien d'Explicitation en Situation Scolaire - M.Bonnet ; J.Crozier ; G.Germain ; G.Fourmod ; P.Vermersch - mars 95


Avec toutes ces rayures ,
pourquoi appeler cela un guide âne?


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Feuille réponse

Réponse n° 1

$\frac{1}{5}$

Réponse n° 2

$\frac{1}{7}$

Réponse n° 3

$\frac{1}{11}$

Réponse n° 4

$\frac{4}{7}$

Réponse n° 5

$\frac{5}{9}$

Réponse n° 6

$\frac{15}{13}$

Réponse n° 7

$\frac{14}{11}$

Réponse n° 8

Ci-dessous utiliser la petite unité

Réponse n°1

$\frac{3}{4}$

Réponse n° 2

$\frac{4}{3}$

Réponse n° 3

$\frac{15}{7}$

Réponse n° 4

$\frac{7}{11}$

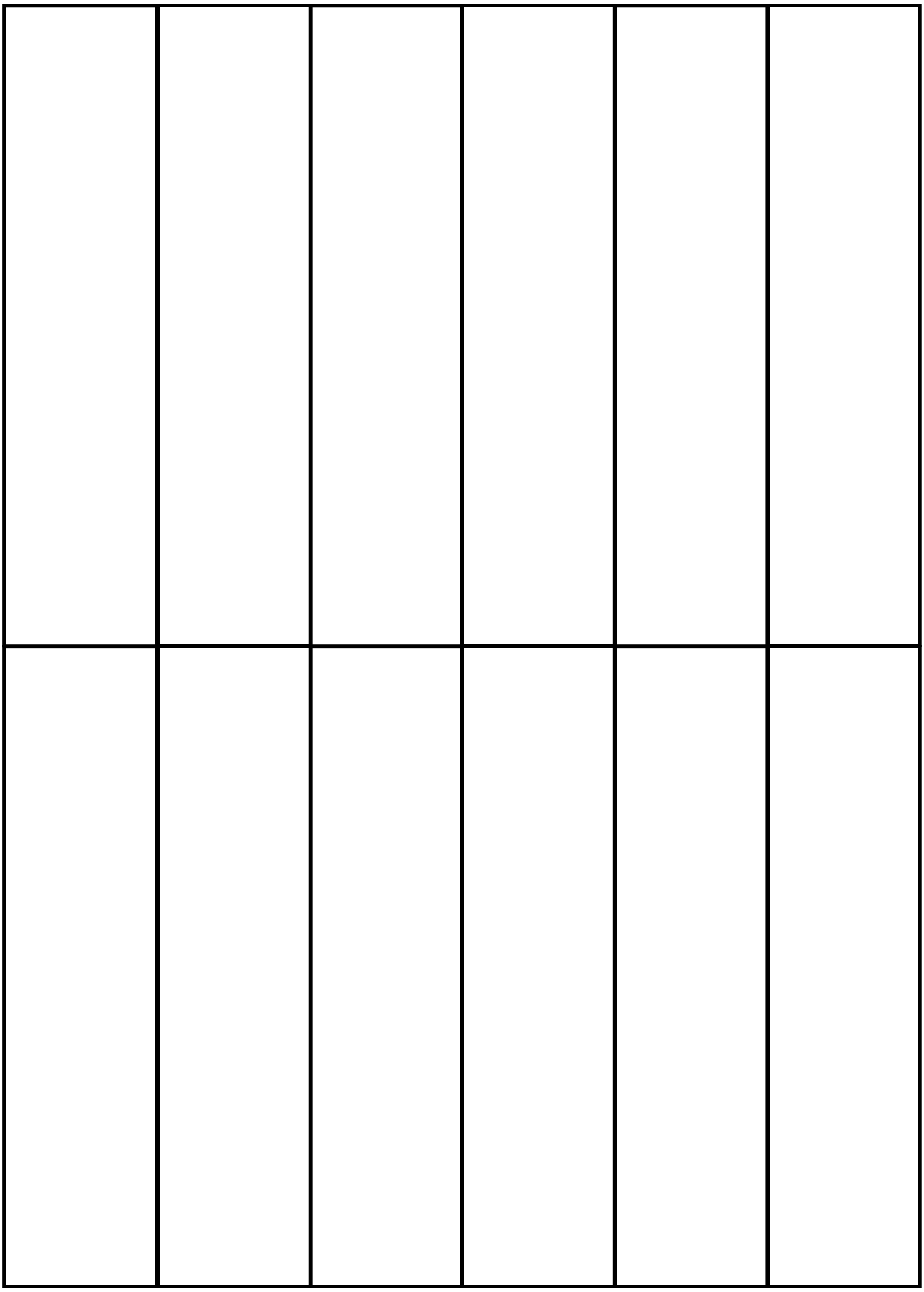
Réponse n°5

$\frac{21}{12}$

Réponse n°6

Réponse n° 7

Réponse n°8



Douze petites unités à découper

Situation 3 : Fractions et graduations

A la fin de la situation précédente, les élèves ont conjugué report d'unités et utilisation du guide-âne pour tracer des segments. Nous leur proposons ici de construire un nouvel outil plus pratique et plus précis (qu'on pourra appeler une règle graduée).

L'utilisation de plusieurs règles, graduées différemment, permettra alors successivement :

- De construire et de mesurer des segments de longueur donnée.
- De se familiariser avec les différentes écritures d'un même nombre.
- D'installer la notion d'abscisse.

1) Durée approximative : 2 séances de 55 minutes + exercices d'application.

2) Apprentissages visés :

- Graduer une demi-droite en fraction de l'unité.
- Savoir que le nombre qui repère un point sur une demi-droite graduée est la distance qui sépare ce point de l'origine.

3) Description de l'activité :

Activité préparatoire : Les élèves construisent individuellement une “ règle ” graduée en cinquièmes (ce temps est rapide, le placer si possible en fin de situation 2).

Séance 1 : Après avoir analysé en commun les erreurs faites sur les premières règles, les élèves dégagent à l'aide de l'enseignant les critères d'une bonne graduation et construisent une ou deux nouvelles règles. Ils construisent des segments de longueurs données.

Séance 2: Les élèves utilisent plusieurs règles graduées en demis, tiers, quarts,... dixièmes pour mesurer sur une demi-droite des segments dont une extrémité est l'origine de cette demi-droite.

On aborde la notion d'abscisse.

4) Matériel :

Activité préparatoire : Pour chaque élève :

- des bandes-unités de 10,5 cm de longueur, comme les petites bandes-unités de la situation 2 ;
- leurs guide-ânes ;
- un rectangle de papier à transformer en règle graduée (annexe 1 ; on peut les découper à l'avance).

Séance 1 : Pour chaque élève :

- un recueil d'erreurs (éventuellement sur transparent) réalisé à l'issue de l'activité préparatoire ;
- le même matériel qu'en séance 1 ;
- éventuellement une fiche réponse (annexe 3 situation 2).

Séance 2 : Pour chaque élève :

- l'annexe 2 : les 6 règles graduées de façon différente ;
- une demi-droite contenant les points A, B, C, D, E (annexe 3 ; à partager en 4)[1] ;
- l'annexe 4 : exercice " drôle de course " ;
- éventuellement les exercices de l'annexe 5.

5) Déroulement :

Activité préparatoire : Graduer (premiers essais)

- Le professeur questionne les élèves à propos de la démarche qu'ils ont utilisée pour tracer des segments à la fin de la situation 2. Il leur fait remarquer qu'ils ont dû reporter des unités, partager une unité en parts égales, et enfin reporter des fractions d'unité, et que ces différents reports entraînent des imprécisions.

  Pour améliorer la rapidité et l'efficacité, il leur propose de fabriquer un nouvel outil à partir d'un rectangle de papier que nous leur fournissons (annexe 1). Ils vont dans un premier temps le " graduer " en cinquièmes d'unité (petite unité de la situation 2). On pourra appeler cet objet une *règle graduée*.

- Au terme de cette activité, le professeur ramasse les productions des élèves afin de sélectionner les erreurs caractéristiques :

  Pas de zéro, graduations irrégulières, nombres écrits sur les segments et pas sur les traits de graduation, pas de nombres écrits….

- Il prépare un recueil d'erreurs qui servira de support à la séance 1 (voir exemple en annexe 6).

Pour laisser au professeur le temps de préparer le recueil d'erreurs, cette activité pourra utilement être placée en fin de situation 2.

Si le temps manque, prévoir alors un recueil d'erreurs autre que celui de la classe.

Séance 1 : Comment graduer

- Le recueil d'erreurs est communiqué à chaque élève ou rétroprojeté. Le professeur demande de déterminer pour chaque règle graduée ce qui gêne et ce qui manque pour mesurer correctement. Le but est d'établir les critères d'une "règle idéale".

[1] Attention, la photocopie modifie parfois les dimensions ; il est capital de vérifier vos documents avant de les distribuer aux élèves !

- Institutionnalisation :

  Une règle est graduée correctement quand :

  - **les segments de graduations sont réguliers ;**
  - **le nombre 0 est indiqué, et la graduation qui lui correspond n'est pas forcément en bord de règle ;**
  - **l'unité est clairement identifiée par le nombre 1, et son report par les nombres 2 ; 3 ; 4 ... ;**
  - **les nombres sont indiqués à proximité des traits de graduation.**

Pour les graduations intermédiaires comme $\frac{8}{5}$, le choix est laissé aux élèves de ne rien écrire, d'écrire $\frac{8}{5}$ ou $1 + \frac{3}{5}$ voire $\frac{3}{5}$. Ces indications sur la règle se veulent des aides personnelles à la mesure et ne sont pas à considérer comme des abscisses de points.

- Application : Le professeur vérifie ensuite l'appropriation de ces critères en faisant graduer en cinquièmes et en septièmes une règle du même type que la précédente. Pour donner l'occasion de tester l'efficacité de l'outil, il demande en exercice d'application de tracer des segments de différentes longueurs : 2 u ; $\frac{3}{5}$ u ; $\frac{10}{5}$ u ; $\left(2+\frac{1}{5}\right)$ u ; $\frac{2}{7}$ u ; $\frac{13}{7}$ u ; $1+\frac{4}{7}$ u ... On pourra utiliser à nouveau la feuille réponse de la situation 2.

On peut éventuellement faire construire une troisième règle aux plus rapides et leur faire construire d'autres segments.

Cette activité permet de mettre en évidence le rôle de l'unité et la nécessité de bien repérer cette unité.
En effet, certains élèves confondent la longueur de la bande-unité, la longueur du rectangle et la longueur d'un cinquième d'unité.

Par la suite, on veillera à faire repérer systématiquement l'unité.

Séance 2 : Notion d'abscisse

Le but de cette séance est de mesurer avec la règle adaptée et d'en arriver à la notion d'abscisse.

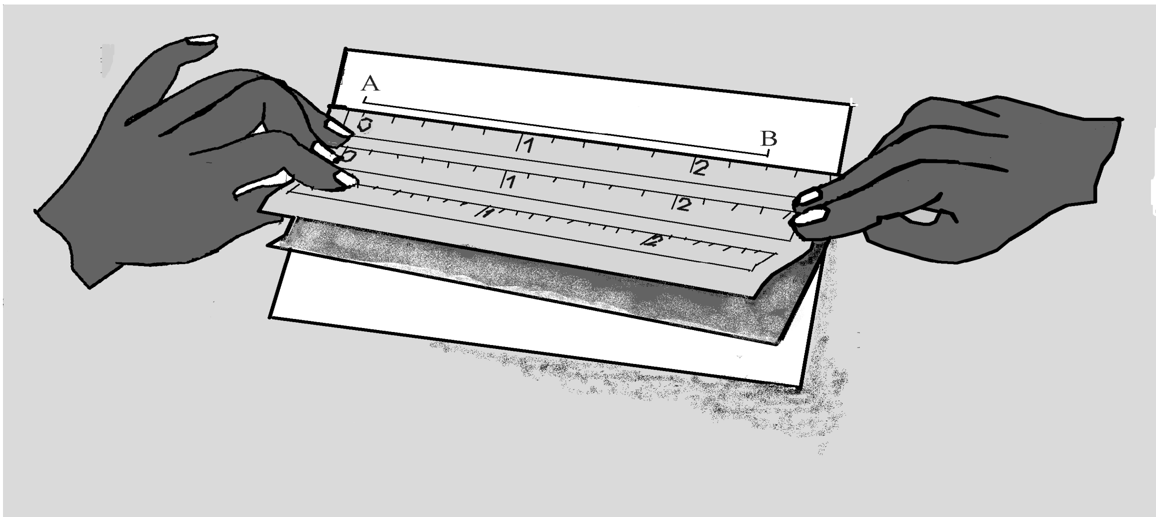
- Phase 1 : L'annexe 2 est distribuée. Les élèves déterminent individuellement quelle est la fraction de l'unité qui a permis de graduer chaque règle. La classe se met d'accord collectivement.

Attention : l'unité a changé et il est important ici de le faire remarquer, d'insister sur le rôle de l'unité et sur la nécessité de la définir.

Comme pour la règle graduée en cinquièmes, les élèves repèrent les graduations intermédiaires comme ils l'entendent.

* <u>Phase 2</u> : Les élèves travaillent sur la demi-droite d'origine A (annexe 3) sur laquelle sont placés les points B, C, D et E. Chaque élève détermine la mesure exacte des différents segments [AB], [AC], [AD] et [AE] à l'aide des règles graduées distribuées (nous rappelons qu'il faut vérifier que les dimensions après photocopie conviennent toujours...).

Pour mesurer, il est inutile de découper chacune des règles, on peut par exemple plier la feuille le long du bord supérieur de chaque règle de l'annexe 2, ou bien plier les bandes de l'annexe 3, le long de la demi-droite d'origine A.



Ce travail est suivi par un temps de correction : “ Par quel nombre repère-t-on les différents points ? ” Lors de cette synthèse en grand groupe, si différentes écritures d'un même nombre apparaissent, on les entérine sans commentaires particuliers, après les avoir validées.

On trouve : $AB = \frac{9}{10}\,u$; $AC = 1\,u$; $AE = 1\,u + \frac{3}{4}\,u$; $AD = 2\,u + \frac{1}{6}\,u$.

Les mesures ont été choisies de façon à ce qu'une seule des règles convienne (à l'exception de [AC]) car les écritures équivalentes feront l'objet de la situation 4.

* <u>Institutionnalisation</u> :

    ♦ **L'abscisse d'un point est le nombre qui repère un point sur la demi-droite graduée.**

    ♦ **L'unité étant fixée, ce nombre est la distance du point à l'origine.**

C'est un moment important car la fraction commence à prendre le statut de nombre.

* <u>Prolongement :</u>

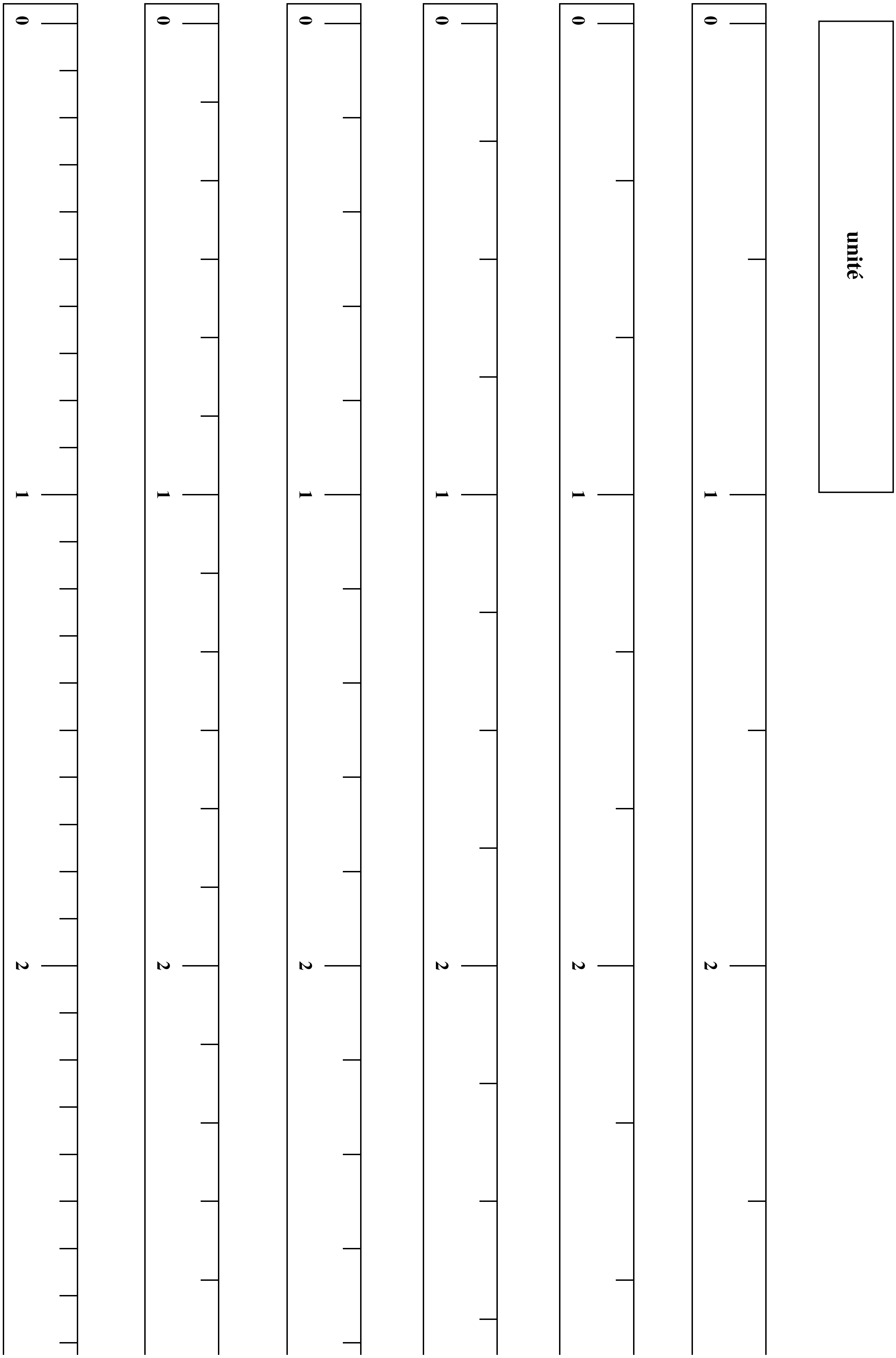
    a) Travail avec les règles graduées :

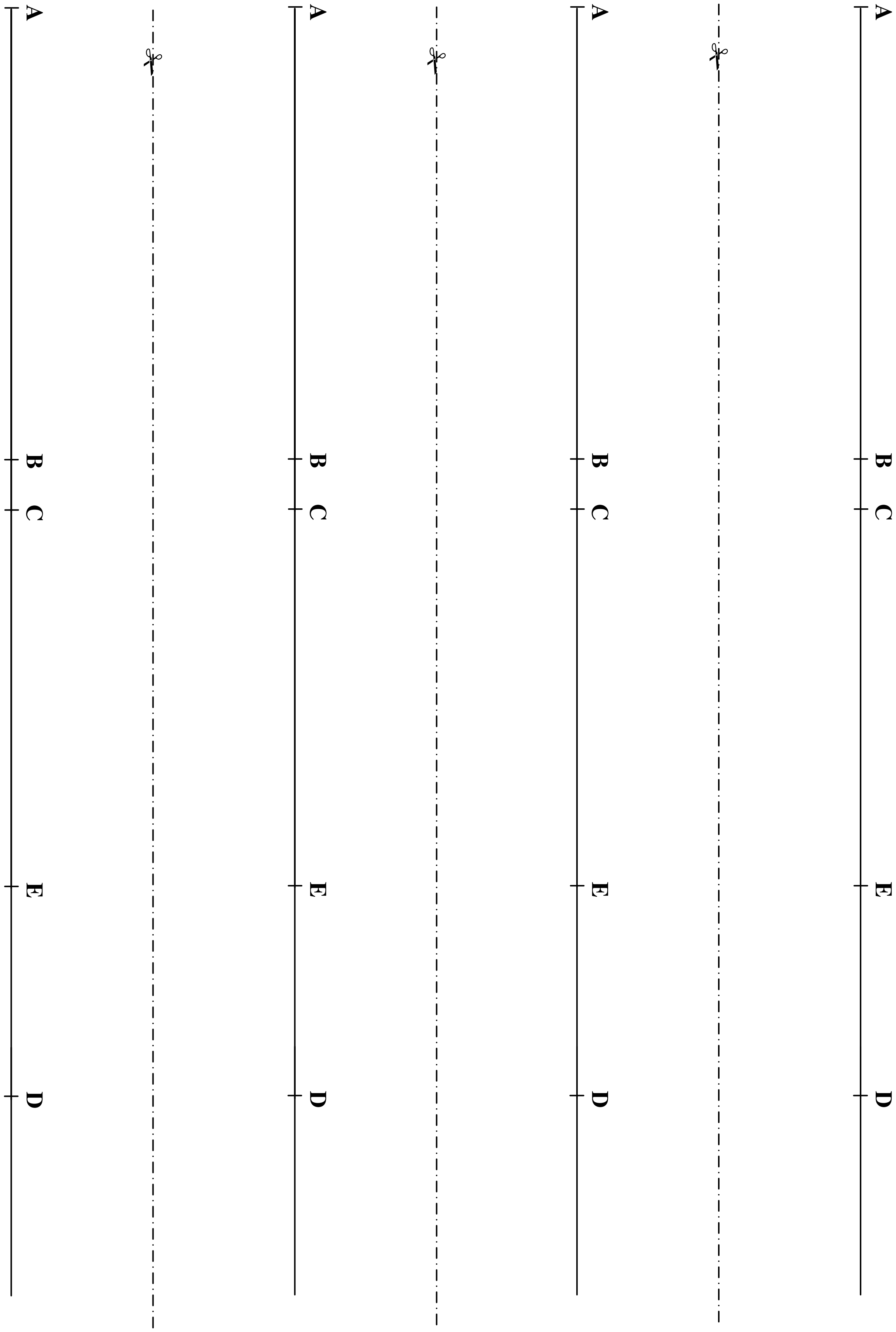
    Les élèves s'entraînent ensuite à placer, sur la même demi-droite, des points d'abscisses données. Par exemple : $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $G\left(\frac{8}{5}\right)$; $H\left(2 - \frac{1}{6}\right)$; $I\left(\frac{7}{3}\right)$; $J\left(\frac{3}{10}\right)$; $K\left(1 + \frac{3}{5}\right)$.

    Ce travail nécessite le repérage de l'unité, le partage de l'unité et la lecture de l'abscisse.

b) Travail sans règle :

- Exercice “ drôle de course ” (annexe 4). Les élèves doivent repérer l’unité (qui est la même pour les six dessins), placer des points et lire des abscisses.
- Éventuellement des exercices du type de ceux proposés en annexe 5.


0
1
2
unité

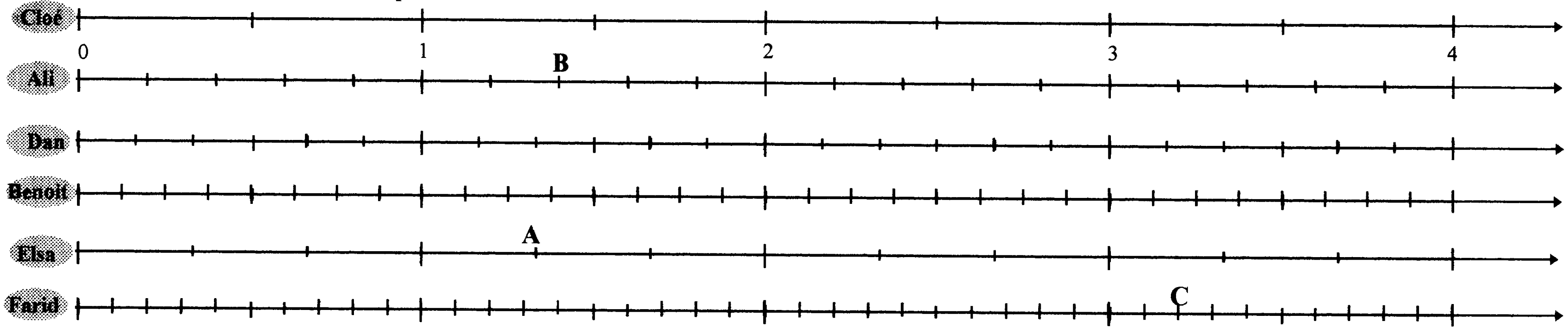

A
B
C
E
D
A
B
C
E
D
A
B
C
E
D
A
B
C
E
D

Drôle de course

Le professeur d'EPS organise une épreuve de vitesse entre six élèves. Il s'agit de courir en ligne droite pendant 3 minutes. Le vainqueur sera l'élève qui aura parcouru la plus grande distance.

Chaque élève a un couloir réservé.

Chaque couloir est gradué avec la même unité. Les élèves ont pensé que cette graduation serait insuffisante et ont décidé de mettre en pratique la leçon de mathématique . Voici les couloirs de chacun.



❶ Cloé est arrivée au point d'abscisse $\frac{7}{2}$ Ali est arrivé au point d'abscisse $\frac{16}{5}$ Dan est arrivé au point d'abscisse $\frac{16}{6}$

Farid est arrivé au point d'abscisse $3 + \frac{1}{2}$ Elsa est arrivé au point d'abscisse $\frac{8}{3}$ Benoit est arrivé au point d'abscisse $\frac{30}{8}$

Marque l'arrivée de chaque élève et établis le classement.

❷ Que d'incidents!

Elsa est passé devant un chien au point A.

Ali a fait une chute au point B.

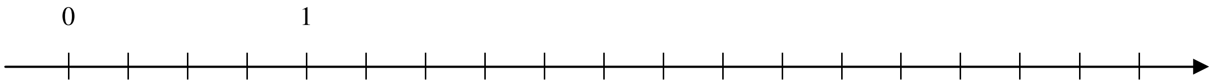
Farid a perdu son dossard au point C.

Trouve l'abscisse de chacun de ces points.

❸ Dan a eu un point de côté au point d'abscisse $\frac{10}{6}$ .Trouve entre quels nombres entiers se situe cette abscisse.

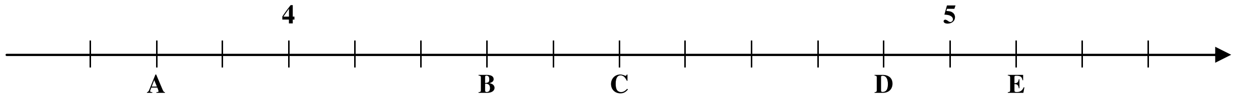
D'après une activité de "DIAGONALE CM$_2$ "

<u>Exercice 1 :</u> Sur la droite “ à graduer ” ci-dessous, place le point A d’abscisse $2 + \frac{3}{4}$, le point B d’abscisse $\frac{7}{4}$, le point C d’abscisse $3 + \frac{5}{8}$.



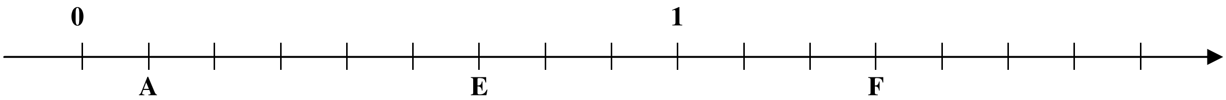
<u>Exercice 2 :</u> Sur la droite “ à graduer ” ci-dessous, place les nombres suivants : 1 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $1 + \frac{1}{4}$.

<u>Exercice 3 :</u> Trouve l’abscisse des points A, B, C, D, E.

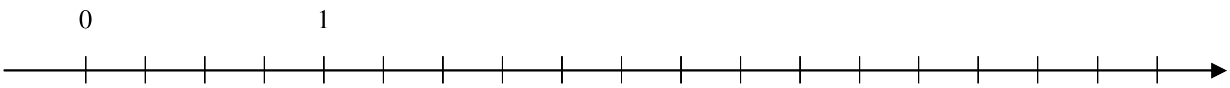


<u>Exercice 4 :</u> Sur la droite graduée ci-dessous, place B d’abscisse $\frac{1}{3}$, C d’abscisse $\frac{13}{9}$, et D d’abscisse $\frac{14}{18}$.

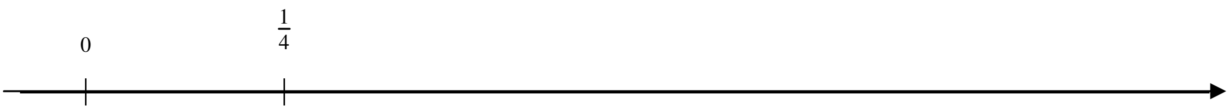
Indique sur la même droite l’abscisse des points A, E et F.



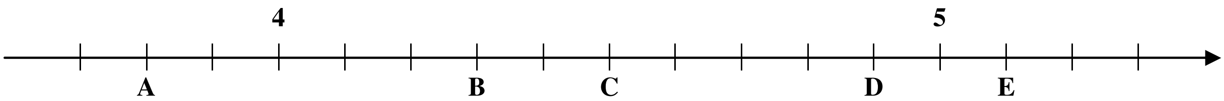
<u>Exercice 1 :</u> Sur la droite “ à graduer ” ci-dessous, place le point A d’abscisse $2 + \frac{3}{4}$, le point B d’abscisse $\frac{7}{4}$, le point C d’abscisse $3 + \frac{5}{8}$.



<u>Exercice 2 :</u> Sur la droite “ à graduer ” ci-dessous, place les nombres suivants : 1 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $1 + \frac{1}{4}$.

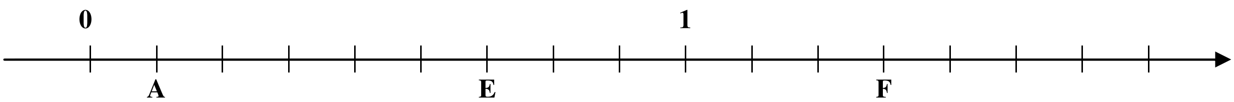


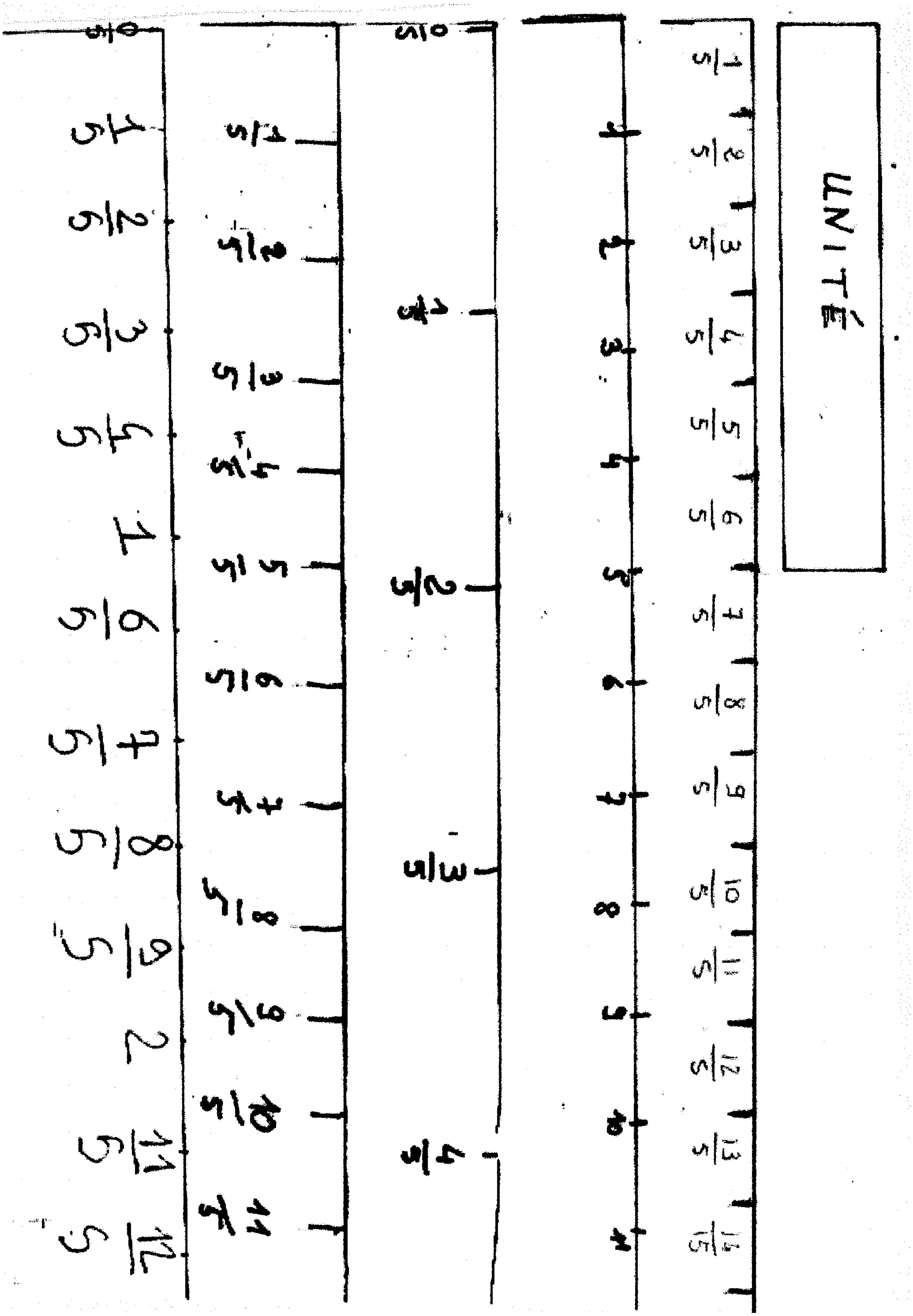
<u>Exercice 3 :</u> Trouve l’abscisse des points A, B, C, D, E.



<u>Exercice 4 :</u> Sur la droite graduée ci-dessous, place B d’abscisse $\frac{1}{3}$, C d’abscisse $\frac{13}{9}$, et D d’abscisse $\frac{14}{18}$.

Indique sur la même droite l’abscisse des points A, E et F.




UNITÉ

Situation 4 : Écritures équivalentes

Au cours des situations précédentes, les élèves ont été confrontés à l'existence de différentes écritures fractionnaires pour un même nombre. Dans cette quatrième situation, ils sont invités à formuler certains de leurs acquis sur les fractions.

1) **Durée approximative :** 2 séances de 55 minutes + exercices d'application.

2) **Apprentissages visés :**
   - Reconnaître une fraction égale à un entier.
   - Encadrer une fraction par deux entiers consécutifs.
   - Décomposer une fraction en une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
   - Connaître et utiliser l'égalité ka / kb = a / b, où a, b, et k sont des entiers (k et b non nuls).

3) **Description de l'activité :**

   Dans la première séance, en prenant appui sur l'expérience acquise par les élèves, on exhibe les méthodes utilisées pour :

   - reconnaître une fraction égale à un entier ;
   - encadrer une fraction par deux entiers consécutifs ;
   - décomposer une fraction en une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

   Dans la deuxième séance, les élèves utilisent les règles graduées introduites dans la troisième séance de la situation 3, pour lire des abscisses. L'inventaire d'écritures fractionnaires ainsi obtenu leur permet de conjecturer une règle qu'ils utilisent pour reconnaître des fractions égales parmi une liste qui leur est fournie.

4) **Matériel :**

   Pour chaque élève **:**
   - les règles graduées utilisées dans la troisième séance de la situation 3 ;
   - l'annexe 1 (à découper en 3) ;
   - éventuellement les exercices des annexes 2, 3 et 4.

5) **Déroulement :**

Séance 1 : Encadrement d'une fraction par 2 entiers consécutifs

- Le professeur donne une liste de fractions et dit : “ Sans placer ces fractions sur une demi-droite graduée, pouvez-vous prévoir entre quels entiers elles seront placées ? ”.

Exemple de fractions possibles : $\frac{7}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{11}{5}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{6}{3}$

Les réponses des élèves et leurs méthodes sont recensées et discutées. La discussion fera par exemple ressortir que :

- 6/3 est un entier : 6/3 = 2 ;
- 7/3 est plus grand que 2, c'est 6/3 plus 1/3 ;
- 7/3 est plus petit que 3, c'est 6/3 plus 1/3 et 1/3 est plus petit que 1 ;
- 7/3 est compris entre 2 et 3.

Ce qui s'écrit : $2 < 7/3 < 3$ et $7/3 = 2 + 1/3$

Il est possible que certains élèves fassent le lien avec la division euclidienne : dans la division de 7 par 3, le quotient est 2 et le reste 1 (à partager en 3).

Cette relation entre décomposition additive d'une fraction et division euclidienne a naturellement sa place au cours de l'étude de la " fraction quotient ". Nous attendrons ce moment pour valoriser cette méthode qui prendra alors tout son sens.

Les réponses sont ensuite validées par le placement des fractions sur une demi-droite graduée.

- Institutionnalisation :

Une fraction peut :

- **soit s'écrire sous la forme d'un entier ;**
  Le numérateur est alors un nombre qui figure dans la table de multiplication du dénominateur (ou le numérateur est un multiple du dénominateur).
- **soit être encadrée par deux entiers consécutifs.**
  Elle peut alors s'écrire comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 et de même dénominateur.

On exemplifiera la méthode qui permet d'écrire une fraction comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 :

Si le numérateur ne figure pas dans la table de multiplication du dénominateur, on cherche le plus grand multiple du dénominateur qui soit inférieur au numérateur. Le quotient de celui-ci par le dénominateur est le plus grand entier inférieur à la fraction.

La différence entre le numérateur de la fraction et le plus grand multiple du dénominateur qui lui est inférieur, fournit le numérateur de la fraction inférieure à un.

- Exercices: (voir annexe 2) Sans recourir au placement de points sur une demi-droite graduée, mais en utilisant les procédés qui viennent d'être institutionnalisés, les élèves sont ensuite entraînés à :
  - reconnaître et produire une fraction égale à un entier ;
  - encadrer une fraction par deux entiers consécutifs ;
  - décomposer une fraction sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 ;
  - écrire une fraction égale à la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Séance 2 : Fractions égales

- Phase 1 : Le professeur distribue l'annexe 1. Il demande aux élèves de déterminer à l'aide des règles graduées (annexe 2 situation 3), l'abscisse du point M.

  La mise en commun qui suit immédiatement fait apparaître que plusieurs règles peuvent être employées pour lire l'abscisse de M et que par conséquent différentes écritures sont possibles pour ce nombre.

  Les élèves déterminent ensuite les abscisses des points P, Q, R, S et T placés sur la seconde demi-droite. *P(1/4), Q(5/3), R(7/5), S(3) et T(5/2).* Il leur est demandé d'exprimer les abscisses soit sous la forme d'entiers, soit sous la forme de fractions, à l'exception de toute autre écriture.

  Les différentes écritures sont recensées et validées en utilisant les règles graduées. Le professeur conclut en précisant que pour un même point il peut y avoir plusieurs écritures fractionnaires de son abscisse ; on dit alors que ces fractions sont égales. Il écrit les égalités correspondantes.

L'objectif de cette étape est d'obtenir un inventaire de fractions égales à partir duquel les élèves vont devoir dans l'étape suivante, conjecturer des règles pour reconnaître des fractions égales puis les formuler.

- Phase 2 : Le professeur donne une liste de fractions et demande aux élèves, sans placer ces fractions sur une demi-droite graduée, de déterminer celles qui sont égales. Le travail est individuel.

Exemple de fractions possibles :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{6}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3} \quad \frac{9}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{6}$$

$$\frac{9}{6} \quad \frac{15}{6} \quad \frac{18}{6} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{12}{10}$$

Les fractions sont choisies afin de pouvoir être placées sur une demi-droite graduée à l'aide des règles dont disposent les élèves.

1/2 = 5/10	*3/2 = 9/6*	*5/2 = 15/6*
2/3 = 4/6	*6/5 = 12/10*	*6/2 = 18/6 = 9/3 = 3*

Des fractions comme 5/4 et 4/3 sont proposées pour mettre en défaut des règles du type

(a + k)/(b + k) = a /b ou encore (a + k)/a= (b + k)/b.

L'addition étant l'opération la mieux maîtrisée, nombreux sont les élèves qui sollicitent spontanément un modèle additif pour produire ou reconnaître des fractions égales. Il est indispensable de faire formuler ces procédures pour aider l'élève à prendre conscience du caractère erroné du modèle sous-jacent.

Nous proposons ici un exemple de gestion possible de la classe :

Le professeur sélectionne une des fractions dans la liste et recense toutes les fractions que les élèves proposent comme lui étant égales. La classe valide ces propositions en faisant placer les fractions sur une demi-droite graduée avec la même unité que celle utilisée pour les règles. Les égalités exactes sont regroupées dans une partie du tableau et celles qui sont erronées dans une autre partie.

Au cas où la remarque n'aurait pas été faite, une fois la liste de fractions examinée, le professeur propose de chercher si certaines d'entre elles sont égales à un entier.

Il fait ensuite formuler oralement par leurs auteurs, les procédures qui ont conduit à des égalités erronées.

Puis, il demande comment faire pour obtenir une fraction égale à une fraction donnée. Après un temps de recherche individuelle, un débat est engagé. Il doit aboutir à la formulation d'une ou plusieurs règles.

Les règles seront formulées à l'aide de phrases qui sont plus appropriées à des élèves de 6ème que des écritures littérales complexes du type : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$ *et* $\frac{a : k}{b : k} = \frac{a}{b}$

Il est nécessaire d'arriver à deux formulations, l'une avec la multiplication, du type : " On obtient une fraction égale en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre " et l'autre avec la division. Les élèves ne disposent pas à ce stade de la progression, du produit d'un nombre par un quotient : Par conséquent, la première règle n'est pas opérationnelle pour produire, par exemple, une fraction égale à 9/6 et s'écrivant avec des nombres plus petits comme 3/2 ; le $9/6 = (9 \times 1/3) / (6 \times 1/3) = 3/2$.

Le professeur demande alors comment reconnaître deux fractions égales (question rendue nécessaire par le fait que les élèves ne disposent pas de la multiplication par une fraction ou même par un décimal). On peut :

- soit appliquer les deux règles précédentes ;
- soit trouver une troisième fraction égale aux deux autres :
- C'est par exemple le cas pour 4/6 = 14/21 où on ne peut pas utiliser le fait que $4/6 = (4 \times 3,5) / (6 \times 3,5) = 14/21$.

- Institutionnalisation :

On obtient une fraction égale à une autre :

- ♦ **en multipliant numérateur et dénominateur par un même nombre ;**
- ♦ **en divisant numérateur et dénominateur par un même nombre.**

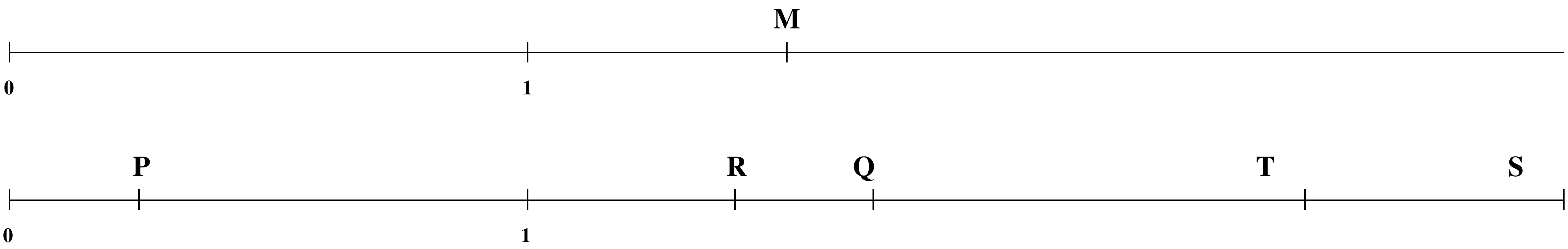
Deux fractions sont égales :

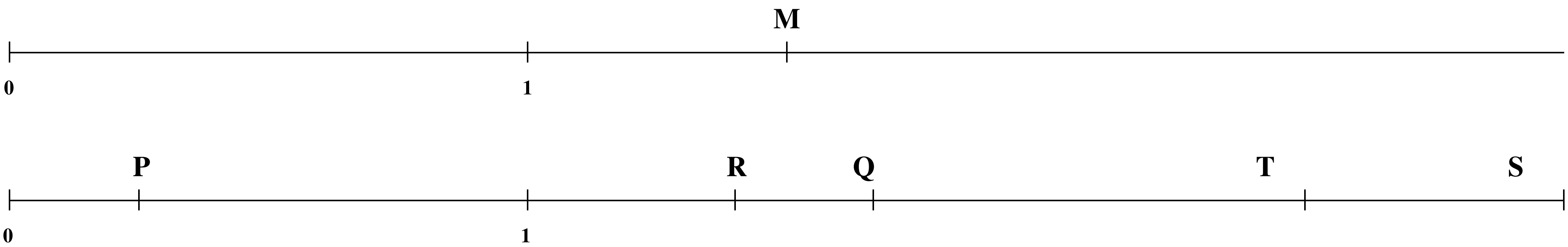
- ♦ **si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre, ou ;**
- ♦ **si elles sont égales à une même troisième ou à un même entier.**

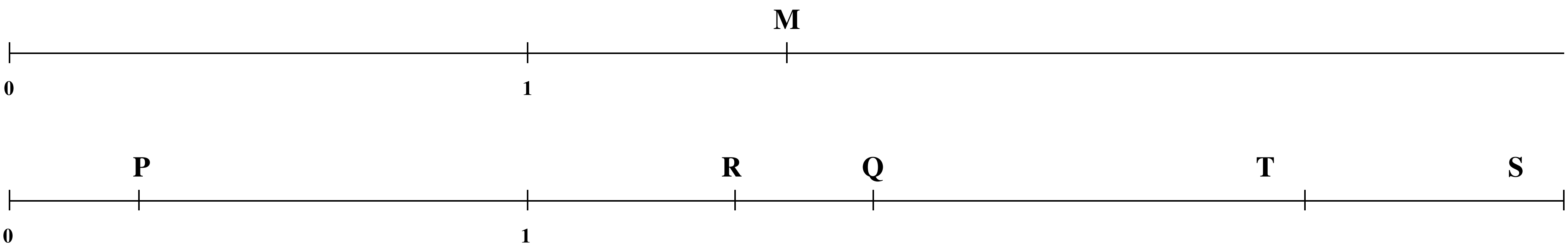
Il est possible que certains élèves remarquent que deux fractions sont égales, lorsque le produit du numérateur de la première fraction par le dénominateur de la seconde est égal au produit du dénominateur de la première par le numérateur de la deuxième (4/6 = 14 /21 car $4 \times 21 = 6 \times 14$*). Cette notion ne fait pas partie du programme de 6ème. Si toute fois la procédure apparaît lors de la synthèse, le professeur jugera s'il est nécessaire de l'institutionnaliser ou pas.*

- Exercices : (voir annexe 3) Sans recourir au placement de points sur une demi-droite graduée, mais en utilisant les règles qui viennent d'être institutionnalisées, les élèves sont entraînés à :

  - reconnaître des fractions égales ;
  - produire des fractions égales à une fraction donnée, le numérateur ou le dénominateur étant imposé.


M
0
1
P
R
Q
T
S
0
1


M
0
1
P
R
Q
T
S
0
1


M
0
1
P
R
Q
T
S
0
1

(à faire après la séance 1)

Exercice 1 : Dans la liste de fractions suivantes, entoure les nombres entiers.

$\frac{12}{3}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{15}{5}$ $\frac{7}{14}$ $\frac{13}{9}$ $\frac{32}{8}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{57}{8}$ $\frac{80}{4}$

Dans la liste de fractions suivantes, entoure celles qui désignent des nombres plus petits que 1.

$\frac{8}{12}$ $\frac{21}{4}$ $\frac{13}{5}$ $\frac{47}{10}$ $\frac{15}{6}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{29}{9}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{12}{12}$

Exercice 2 : Entoure de la même couleur les écritures qui désignent le même nombre.

$\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{25}{10}$ $\frac{9}{5}$ $2+\frac{5}{10}$ $\frac{3}{6}$ $1+\frac{1}{2}$ $\frac{17}{10}$

$4+\frac{1}{2}$ $1+\frac{4}{5}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{9}{2}$ $1-\frac{3}{6}$ $2+\frac{2}{5}$ $1+\frac{2}{5}$ $1+\frac{7}{10}$

Exercice 3 : Trouve pour chaque tableau une fraction comprise entre les deux entiers consécutifs donnés :

2	$\frac{}{2}$	3
1	$\frac{}{6}$	2
3	$\frac{}{4}$	4
0	$\frac{}{5}$	1
4	$\frac{}{3}$	5
2	$\frac{}{10}$	3
4	$\frac{}{12}$	5
51	$\frac{}{2}$	52
6	$\frac{}{6}$	7
5	$\frac{}{16}$	6

Exercice 4 : Pour chaque fraction donnée, trouve les deux entiers consécutifs qui l'encadrent :

	$\frac{10}{4}$	
	$\frac{29}{7}$	
	$\frac{26}{3}$	
	$\frac{62}{8}$	
	$\frac{9}{8}$	
	$\frac{98}{6}$	
	$\frac{32}{5}$	
	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{54}{7}$	
	$\frac{1}{19}$	

Exercice 5 : Complète

$3+\frac{2}{5}=\frac{\dots}{\dots}$	$1+\frac{4}{10}=\frac{\dots}{\dots}$	$5+\frac{3}{4}=\frac{\dots}{\dots}$	$8+\frac{3}{8}=\frac{\dots}{\dots}$	$6+\frac{27}{100}=\frac{\dots}{\dots}$

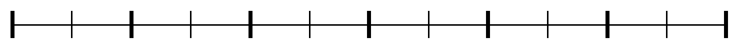
Exercice 6 : Ecris les fractions sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$\frac{10}{7}=\dots+\frac{\dots}{7}$	$\frac{25}{4}=\dots+\frac{\dots}{4}$	$\frac{45}{6}=\dots+\frac{\dots}{6}$	$\frac{72}{10}=\dots+\frac{\dots}{10}$	$\frac{35}{8}=\dots+\frac{\dots}{8}$
$\frac{13}{4}=\dots+\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{42}{10}=\dots+\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{43}{5}=\dots+\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{8}{5}=\dots+\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{234}{100}=\dots+\frac{\dots}{\dots}$

(À faire après la séance 2)

<u>Exercice 7 :</u> Complète les égalités suivantes en t'aidant éventuellement du segment gradué suivant.

0 1



$\frac{1}{6} = \frac{...}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{...}{12}$ $\frac{3}{3} = \frac{...}{12}$ $\frac{2}{6} = \frac{...}{12}$ $\frac{1}{3} = \frac{...}{12}$ $\frac{4}{6} = \frac{...}{12}$

<u>Exercice 8 :</u> Complète les égalités :

$\frac{8}{10} = \frac{4}{...} = \frac{...}{20}$	$\frac{9}{12} = \frac{3}{...}$	$\frac{3}{4} = \frac{6}{...} = \frac{...}{12}$	$\frac{8}{8} = \frac{16}{...}$	$\frac{4}{3} = \frac{...}{9}$	$\frac{6}{8} = \frac{...}{16}$	$\frac{5}{3} = \frac{15}{...}$

<u>Exercice 9 :</u> Place le signe = ou $\neq$ entre les fractions.

$\frac{1}{4} \dots \frac{3}{8}$ $\frac{5}{3} \dots \frac{10}{6}$ $\frac{3}{10} \dots \frac{6}{20}$ $\frac{2}{3} \dots \frac{10}{6}$ $\frac{20}{5} \dots \frac{12}{3}$ $\frac{6}{3} \dots \frac{10}{5}$

$\frac{3}{4} \dots \frac{9}{12}$ $\frac{16}{6} \dots \frac{16}{5}$ $\frac{2}{10} \dots \frac{1}{5}$ $\frac{7}{2} \dots \frac{2}{7}$ $\frac{8}{3} \dots \frac{16}{6}$ $\frac{12}{4} \dots \frac{15}{5}$

<u>Exercice 10 :</u>

Complète le tableau suivant en écrivant sur la même ligne plusieurs écritures du même nombre.

Écriture avec partie entière	Écriture fractionnaire	Autre écriture fractionnaire
$2 + \frac{3}{4}$		
	$\frac{25}{8}$	
		$\frac{21}{15}$
$5 + \frac{3}{10}$		
	$\frac{38}{10}$	

<u>Exercice 11 :</u> Complète en utilisant < ou >.

$3 + \frac{2}{3} \dots \frac{10}{3}$ $1 + \frac{7}{10} \dots \frac{30}{20}$ $\frac{7}{4} \dots 1 + \frac{5}{16}$ $\frac{155}{100} \dots 2 - \frac{5}{10}$

(Pour préparer la situation 5)

Exercice 12 : Complète

a) On plie une bande unité en 4 puis en 2, la bande est partagée en ………. d'unité.

b) On plie une bande unité en 3 puis en 3, la bande est partagée en ………. d'unité.

c) On plie une bande unité en 3 puis en 4, la bande est partagée en ………. d'unité.

d) On plie une bande unité en 2 puis en …, la bande est partagée en *sixièmes* d'unité.

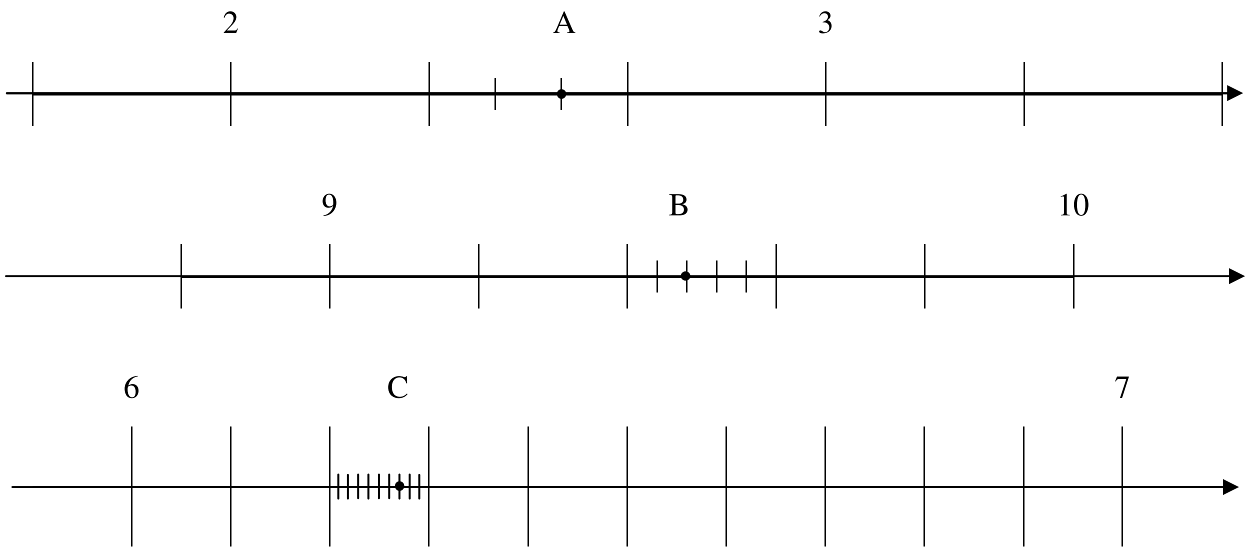
Exercice 13 : Aurélie dit que la moitié d'un tiers, c'est $\frac{1}{5}$. Gilbert dit que la moitié d'un tiers, c'est $\frac{1}{6}$. Qui a raison ?

Michel dit que le quart d'un quart, c'est $\frac{1}{16}$. Brigitte dit que le quart d'un quart c'est $\frac{1}{8}$. Qui a raison ?

Que vaut un cinquième d'un cinquième ?

Que vaut un dixième d'un dixième ?

Exercice 14 : Sur ces trois droites, certaines graduations ont été effacées, écris l'abscisse de chacun des points A , B , C .



Situation 5 : Fractions décimales et nombres décimaux

Lors des situations précédentes, les élèves ont déjà rencontré des dixièmes, ils ont pu remarquer que ces fractions étaient faciles à décomposer : $\frac{45}{10}$ s'écrit facilement $4 + \frac{5}{10}$. Le but de cette nouvelle situation est d'étendre cette notion aux autres fractions décimales et de donner ainsi du sens à l'écriture “ à virgule ”.

Pour aborder cette situation, il est indispensable que les élèves sachent que le centième est non seulement le partage de l'unité en cent mais aussi le dixième du dixième de l'unité. On peut, par exemple, proposer avant cette séance, les numéros 12, 13 et 14 de la liste d'exercices (situation 4 annexe 4).

1) **Durée :** 3 séances de 55 minutes + exercices d'application.

2) **Apprentissages visés :**
   - Redécouvrir les décompositions d'une fraction décimale en unités, dixièmes et centièmes.
   - Décoder une écriture décimale pour placer un point d'abscisse donnée.
   - Passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire et vice versa.
   - Comparer des décimaux.

3) **Description de l'activité :**

   Dans la séance 1, les élèves travaillent seuls sur des axes gradués au centième (voir annexe 1). Ils lisent des abscisses puis ils placent des nombres (donnés sous forme de fractions décimales ou de leurs décompositions additives). Les résultats sont comparés en groupes puis validés en classe entière.

   Dans la séance 2, les élèves doivent placer 5 nombres donnés en écriture décimale. Le débat qui suit permet d'installer la notion d'écriture décimale comme un codage d'écriture fractionnaire.

   Dans la séance 3, les élèves comparent tout d'abord des décimaux qu'ils peuvent représenter sur un axe gradué en centièmes, puis d'autres décimaux qu'ils ne peuvent plus matérialiser.

4) **Matériel :**

Le rétroprojecteur est indispensable.

Séance 1 : Pour chaque élève :

- une demi-feuille A4 sur laquelle sont tracés plusieurs axes gradués en centièmes (annexe 1) ;
- éventuellement une photocopie d'exercices (annexe 3).

Pour la mise en commun :

- un transparent de l'annexe 1.

Séances 2 et 3 : Pour chaque élève :

- une demi-feuile A4 sur laquelle sont tracés plusieurs axes gradués en centièmes (annexe 2) ;
- éventuellement, une photocopie d'exercices (annexe 4 et 5).

Pour la mise en commun :

- un transparent de l'annexe 2.

5) Déroulement :

Séance 1 : Fractions décimales

- Phase 1 : Les élèves travaillent d'abord seuls, ils doivent lire l'abscisse des points A(1) ; B (1/10) ; C(1/100). La validation se fait en groupe puis en classe entière.
- Phase 2 : Les élèves lisent et écrivent, seuls, les abscisses des points : D (37/100) ; E (234/100) et F (107/100). Ils comparent leurs écritures en groupe. Puis, pour chaque abscisse, les groupes proposent à la classe au moins deux écritures (uniquement exprimées avec des dixièmes ou des centièmes). La validation se fait en classe entière.

Pendant cette synthèse, le professeur pourra insister sur le " comment as-tu fait " de certains élèves pour obtenir leurs méthodes et faire justifier ainsi les différentes écritures.

- Phase 3 : Le professeur propose de trouver d'autres écritures des nombres suivants :

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} \quad ; \quad \frac{230}{100} \quad ; \quad 1 + \frac{8}{100} \quad ; \quad \frac{95}{100}$$

Ces nouvelles écritures ne devront contenir que des entiers ou des fractions de dénominateur 10 ou 100 ou une somme des deux.

Les élèves travaillent seuls puis vérifient en groupe. Toutes les écritures sont alors recensées et validées par placement sur une droite graduée (au rétroprojecteur).

Il est possible que certaines écritures décimales soient alors proposées, on ne les retiendra pas pour l'instant mais elles seront l'occasion d'introduire la séquence suivante.

- Phase 4 : L'abscisse de K est 1147/1000. 0ù est placé ce point sur la droite graduée ?

Chaque élève répond individuellement sur le 3ème axe.

Les différents points proposés sont alors placés sur une même droite graduée (au rétroprojecteur). La confrontation des réponses permet de préciser ce qu'est le millième.

Cette activité permet d'installer la notion de millième comme dixième de centième et de préparer la généralisation de la décomposition additive d'une fraction décimale.

- Institutionnalisation :

Une fraction est décimale si son dénominateur est : 10, 100, 1000…

- ♦ $\mathbf{1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000} = ...}$
- ♦ $\mathbf{\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000} = ...}$
- ♦ $\mathbf{\frac{1}{100} = \frac{10}{1000} = ...}$

Une fraction décimale peut se décomposer :

- ♦ **sous la forme : entier + fraction décimale inférieure à 1 ,**
- ♦ **ou sous la forme : entier + dixièmes + centièmes + millièmes +...**

- Exercices : Donner des décompositions de fractions décimales, retrouver des fractions décimales à partir de leur décomposition additive, encadrer une fraction décimale par deux entiers. Lire des abscisses. Placer des points d'abscisses données sous forme de fractions décimales ou de leurs décompositions additives (voir annexe 3).

Séance 2 : Nombres décimaux

Les élèves connaissent déjà l'écriture " à virgule ". Pendant la séance 1, certains l'ont peut-être déjà proposée. Le but de cette activité est de faire apparaître les différentes représentations qu'ont les élèves de cette écriture et de redécouvrir sa signification.

- Le professeur indique l'enjeu de l'activité, puis chaque élève reçoit pour consigne de placer sur le 4ème axe (annexe 1), les points L (1,10) ; M (1,13) ; N(2,3) ; P (2,03) ; Q (0,1) à l'endroit où il pense qu'ils se trouvent.

  Les différentes propositions sont répertoriées et présentées à la classe (au rétroprojecteur, le professeur pourra utiliser l'annexe 2). Sur un axe, on regroupe toutes celles qui concernent les points M, N et P, et sur un deuxième axe, celles qui concernent les points L et Q.

  Le professeur ne formule aucun commentaire sur l'exactitude des propositions. L'abscisse de chaque point proposé est alors lue, et écrite au tableau sous la forme d'une décomposition additive. Ces écritures sont mises en parallèle avec les écritures décimales données dans la consigne. Le débat qui suit vise à faire expliciter les différentes conceptions de l'écriture à virgule et d'en rappeler la signification.

Les 5 nombres décimaux choisis le sont pour mettre en confrontation les conceptions courantes des élèves en classe de 6ème ; ainsi 1,10 sera peut-être représenté par 1/10 (0,1) ; 1,13 sera peut-être confondu avec 1 + 13/10 (2,3) ; de la même façon 2,3 sera peut-être perçu comme 2+3/100 (2,03).

- Institutionnalisation :

  Par convention, une fraction décimale se code par une écriture " à virgule " appelée écriture décimale :

  - **L'écriture décimale correspond à une décomposition de l'écriture fractionnaire :**

    $$\mathbf{2{,}63 = 2 + \frac{63}{100} = 2 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100}}.$$

  - **Une écriture décimale comprend une partie entière et une partie décimale inférieure à 1.**
  - **Lorsque la partie décimale est égale à 0, le nombre décimal est un entier.**
  - **Le nombre décimal 2,63 peut être encadré :**

    $\mathbf{2 < 2{,}63 < 3}$ **et** $\mathbf{2{,}6 < 2{,}63 < 2{,}7}$.

Pour rappeler la fraction décimale, le nombre à virgule peut être dorénavant lu en décomposant l'écriture fractionnaire : au lieu de dire " 2 virgule 63 " on pourra s'habituer à dire " 2 unités et 63 centièmes " ou " 2 unités 6 dixièmes et 3 centièmes ".

- Exercices : Placer des points d'abscisses données en écriture décimale. Lire des abscisses de points et les écrire sous forme décimale. Transformer des écritures fractionnaires en écritures décimales et inversement... (voir annexes 4 et 5)

Séance 3 : Comparaison de décimaux

- Phase 1 : Le professeur propose aux élèves de comparer, deux à deux, des nombres ne comportant pas plus de deux décimales.

  Exemples possibles :

  1,23 et 2,5 — 1,4 et 1,36 — 2,04 et 2,4

  2,29 et 1,3 — 0,7 et 0,70 — etc.

  Les réponses des élèves sont recensées, la validation se fait par placement sur l'axe gradué en centièmes.

- Phase 2 : Les élèves comparent deux à deux des nombres pouvant comporter plus de deux décimales, la validation matérielle n'est plus possible.

  Exemples possibles :

  0,21 et 0,219 — 4,25 et 4,248 — 2,517 et 2,5

  16,31 et 16,301 — 3,07 et 2,703 — 13,670 et 3,672

  Les réponses des élèves et leurs méthodes sont recensées et discutées.

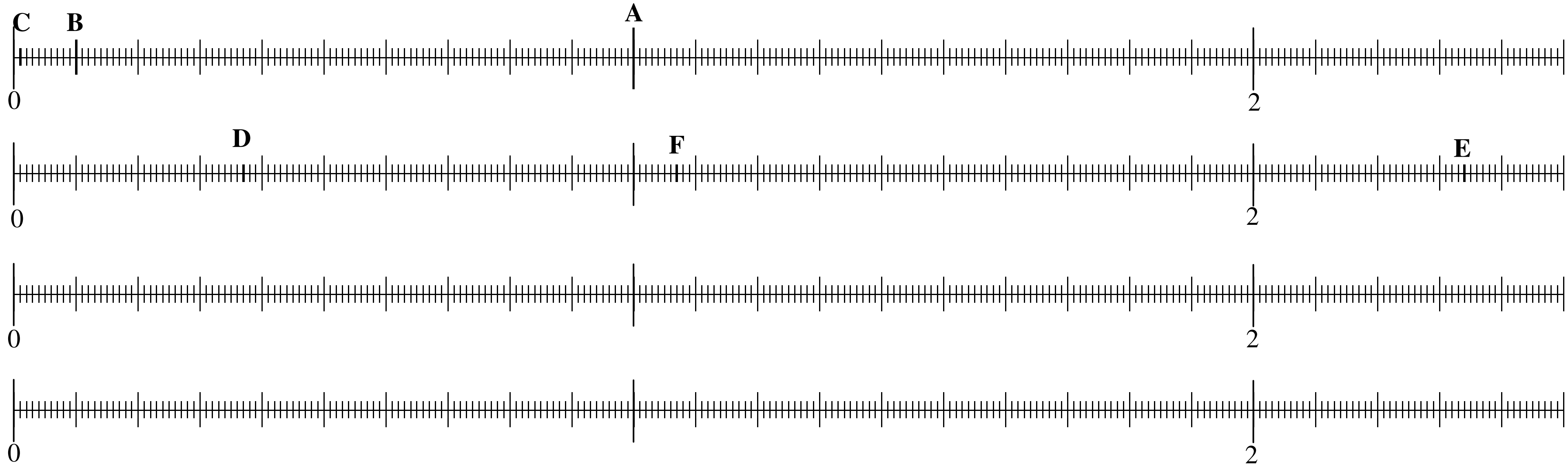
- Institutionnalisation :

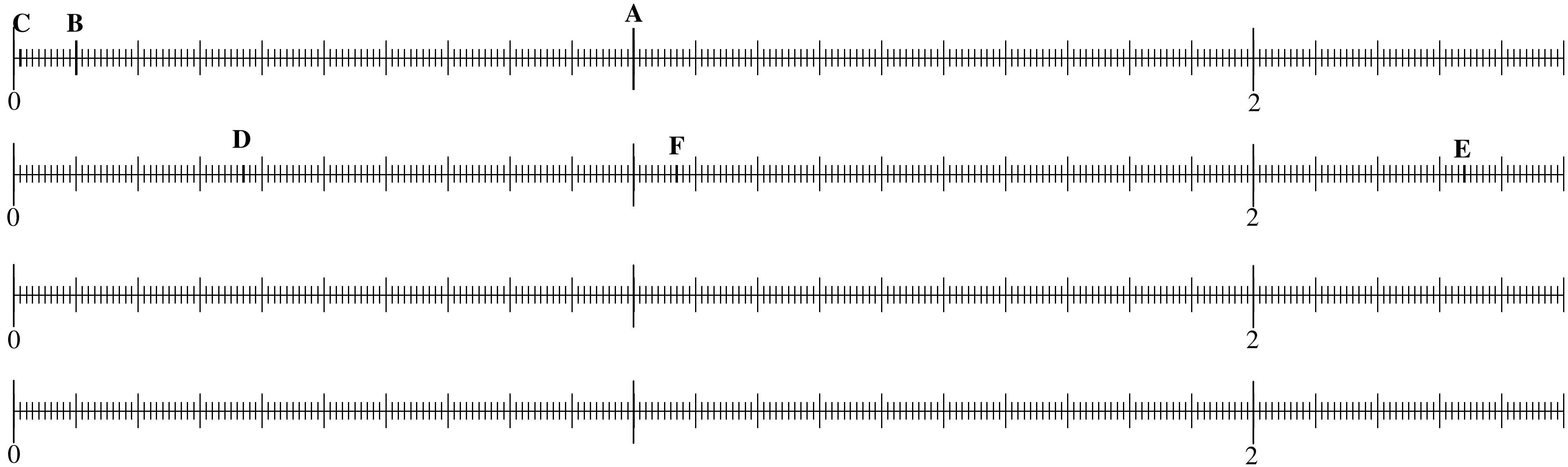
  - ♦ **Le décimal qui a la plus grande partie entière est le plus grand.**
  - ♦ **A partie entière égale, celui qui a le plus grand nombre après la virgule n'est pas forcément le plus grand.**
  - ♦ **Comparer les parties décimales revient à comparer des fractions décimales : comparer 2,1 et 2,01 c'est comme comparer $\frac{21}{10}$ et $\frac{201}{100}$.**
  - ♦ **Il existe différentes méthodes pour comparer des parties décimales :**
    - **On peut comparer chiffre par chiffre.**
    - **On peut compléter les parties décimales par des zéros inutiles pour qu'elles aient le même nombre de chiffres, puis comparer les nombres ainsi formés.**

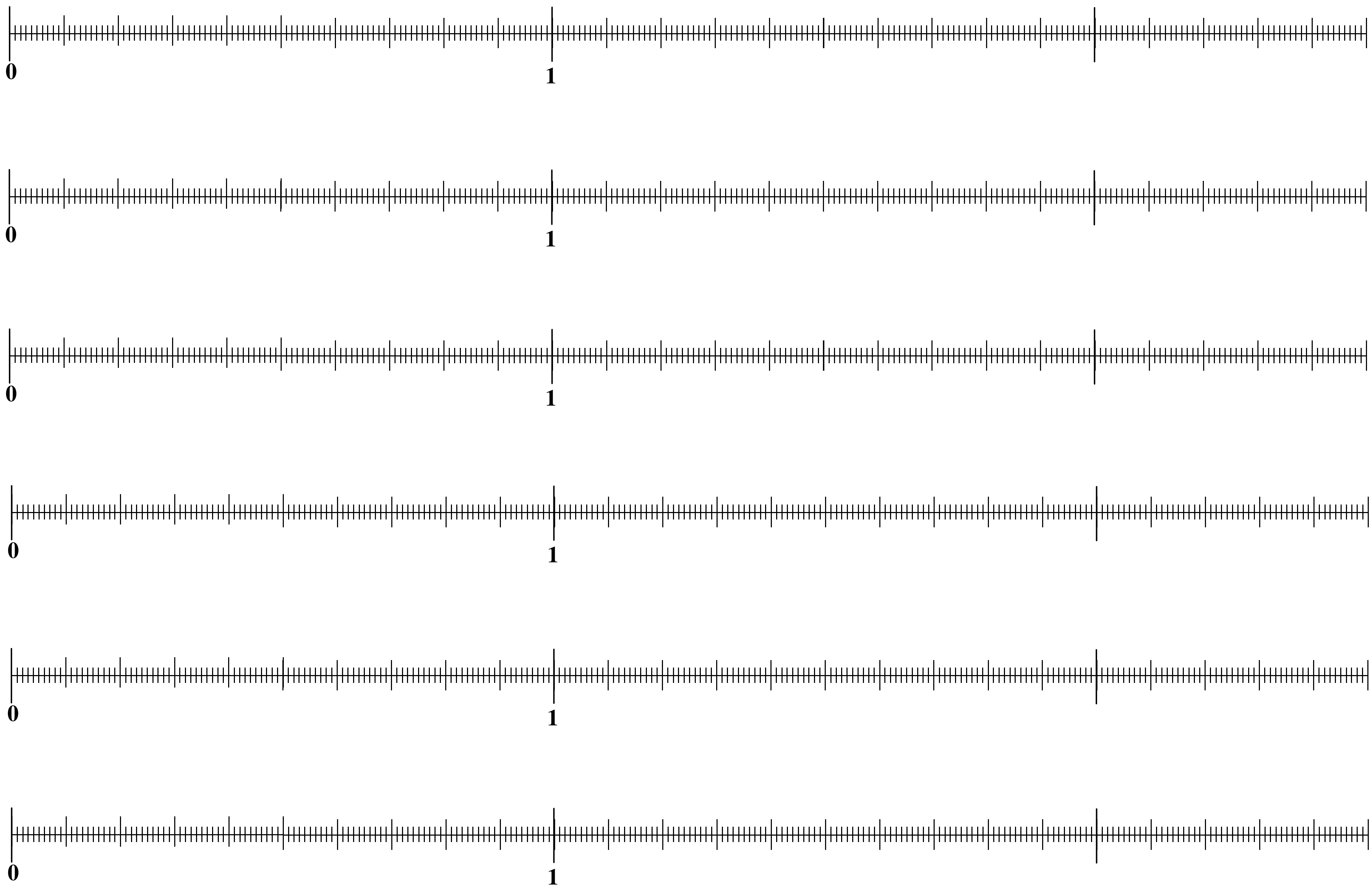
- Exercices de votre manuel :

  - Comparer des décimaux.
  - Ranger des décimaux dans l'ordre croissant ou décroissant.
  - Intercaler un décimal entre deux autres…


6,55957
mais où sont
passé les
centimes?


C
B
A
0
2
D
F
E
0
2
0
2
0
2

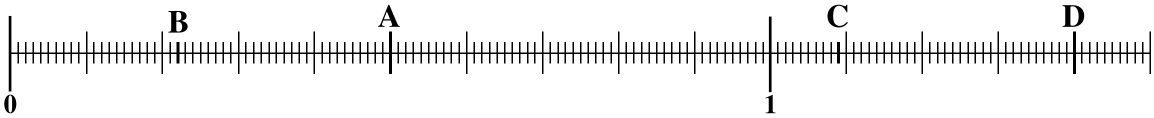

C
B
A
0
2
D
F
E
0
2
0
2
0
2


0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1

Exercice 1 : a) Donne l'abscisse des points A, B, C, et D marqués sur l'axe ci-dessous.

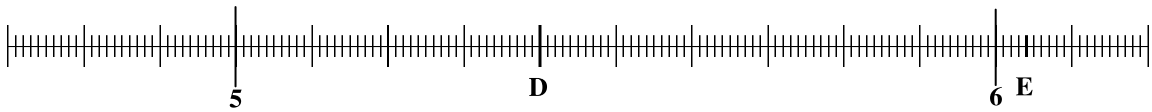
b) Place les points E, F, G et H tels que: E $\left(\frac{8}{10}\right)$; F $\left(\frac{15}{100}\right)$; G $\left(\frac{137}{100}\right)$; H $\left(\frac{90}{100}\right)$.

c) Donne d'autres écritures de ces abscisses.



Exercice 2 : a) Sur la portion d'axe ci-dessous, place les points A $\left(5+\frac{200}{1000}\right)$, B $\left(\frac{55}{10}\right)$, C $\left(\frac{490}{100}\right)$.

b) Si 0 est l'origine, quelle est la longueur (en unité de graduation de cet axe) du segment [OD], du segment [OE] ?



Exercice 3 : Pour chaque fraction donnée, trouve les deux entiers consécutifs qui l'encadrent :

	$\frac{22}{10}$	
	$\frac{8956}{1000}$	
	$\frac{68}{100}$	
	$\frac{4573}{100}$	
	$\frac{538}{10}$	
	$\frac{970}{1000}$	
	$\frac{845}{100}$	
	$\frac{937}{10}$	

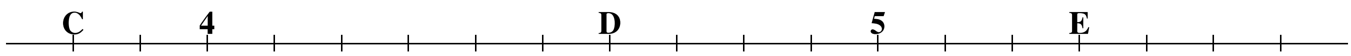
Exercice 4 : Complète :

$$\frac{475}{100} = \ldots + \frac{\ldots}{\ldots} + \frac{\ldots}{\ldots} \quad ; \quad \frac{\ldots}{1000} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{38}{1000} \quad ; \quad 4 = \frac{\ldots}{10} \quad ;$$

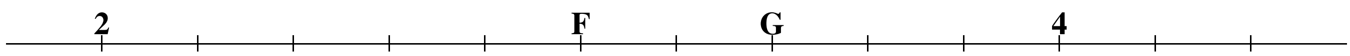
$$1 + \frac{4}{100} + \frac{7}{10} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad ; \quad \frac{25}{10} = \frac{\ldots}{1000} \quad ; \quad \frac{2703}{1000} = \ldots + \ldots + \ldots \quad ;$$

$$\frac{440}{1000} = \frac{\ldots}{100} = \ldots + \ldots \quad ; \quad 1 + \frac{5}{10} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{100} = \frac{15}{10} + \frac{\ldots}{\ldots}$$

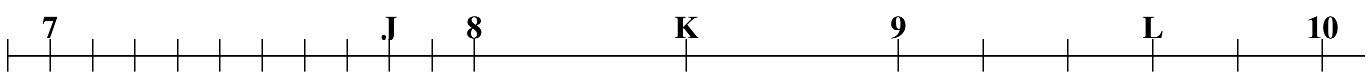
Exercice 5 : Quelles sont les abscisses de C, D et E ? Trouve plusieurs écritures de ces abscisses.



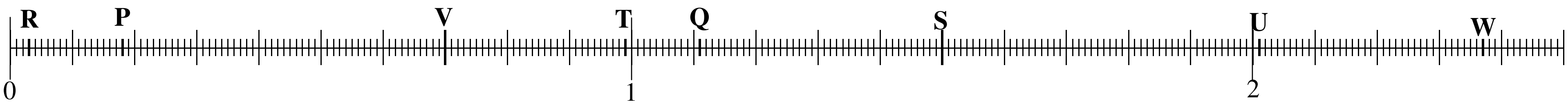
Exercice 6 : Quelles sont les abscisses de F et G ? Trouve plusieurs écritures de ces abscisses.



Exercice 7 : Quelles sont les abscisses de J, K et L ? Trouve plusieurs écritures de ces abscisses.



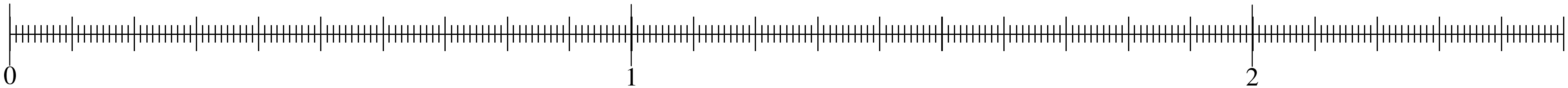
<u>Exercice 8 :</u> Donne l'abscisse des points ci-dessous sous forme d'une fraction, puis d'un nombre décimal.



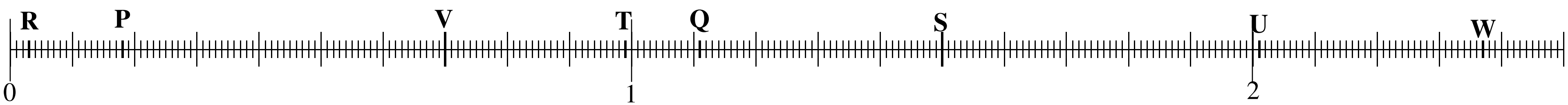
Abscisse de	P	Q	R	S	T	U	V	W
fraction								
décimal								

<u>Exercice 9 :</u> Place les points sur l'axe gradué ci-dessous.

A (0,35) B (1,43) C (2,08) D (0,80) E (1,20) F (0,08) G (2,00)



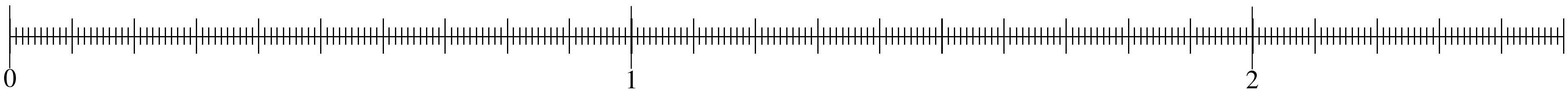
<u>Exercice 8 :</u> Donne l'abscisse des points ci-dessous sous forme d'une fraction, puis d'un nombre décimal.



Abscisse de	P	Q	R	S	T	U	V	W
fraction								
décimal								

<u>Exercice 9 :</u> Place les points sur l'axe gradué ci-dessous.

A (0,35) B (1,43) C (2,08) D (0,80) E (1,20) F (0,08) G (2,00)



<u>Exercice 10 :</u> *(à faire après la séance 2)*

Lecture	*Fraction décimale*	*Somme d'un entier et de fractions décimales*	*Ecriture décimale*
138 centièmes ou 1 unité 38 centièmes	$\frac{138}{100}$	$1+\frac{3}{10}+\frac{8}{100}$	1,38
423 unités 5 centièmes			
			0,70
423 unités 5 dixièmes			
	$\frac{6}{100}$		
		$5+\frac{7}{10}+\frac{8}{1000}$	
	$\frac{640}{1000}$		
			2,549

<u>Exercice10 :</u> *(à faire après la séance 2)*

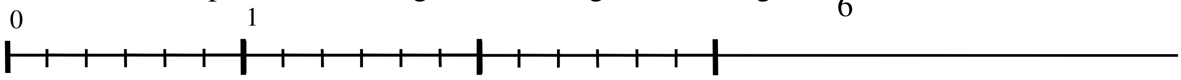
Lecture	*Fraction décimale*	*Somme d'un entier et de fractions décimales*	*Ecriture décimale*
138 centièmes ou 1 unité 38 centièmes	$\frac{138}{100}$	$1+\frac{3}{10}+\frac{8}{100}$	1,38
423 unités 5 centièmes			
			0,70
423 unités 5 dixièmes			
	$\frac{6}{100}$		
		$5+\frac{7}{10}+\frac{8}{1000}$	
	$\frac{640}{1000}$		
			2,549

Multiplication par un entier (quelques exercices)

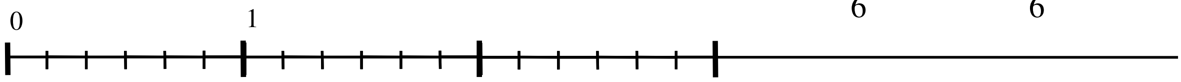
Avant de poursuivre, c'est le moment de s'appuyer sur les situations précédentes pour revoir les techniques opératoires et leur donner du sens. En particulier, avant d'aborder la division (situations 6 et 7), il est nécessaire d'étudier la multiplication d'un nombre en écriture fractionnaire par un entier comme addition réitérée. On pourra proposer des exercices de ce type là :

I- Multiplication d'une fraction par un entier :

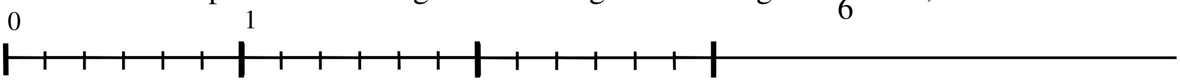
a) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{1}{6}$ unité,



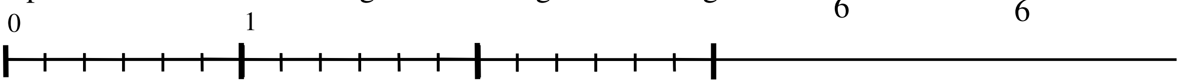
puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur : $4\times\frac{1}{6}$ unité. $4\times\frac{1}{6} = ...$



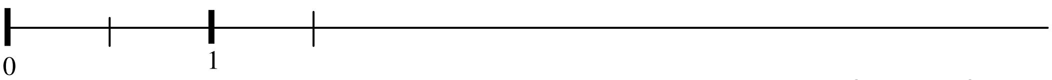
b) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{5}{6}$ unité,



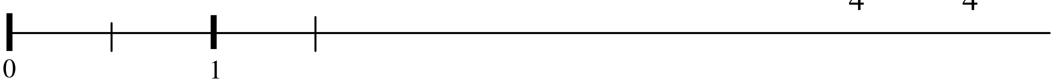
puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur $3\times\frac{5}{6}$ unités. $3\times\frac{5}{6} = ...$



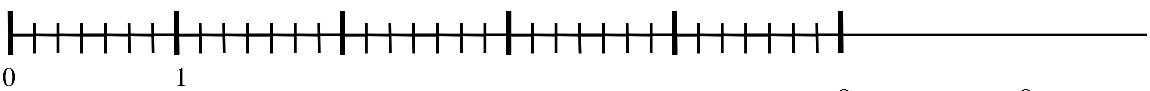
c) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{3}{4}$ unité,



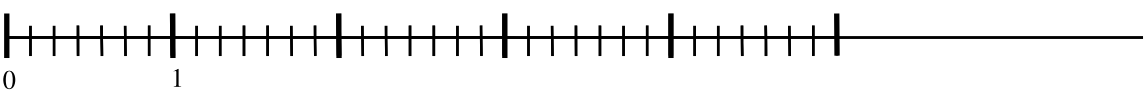
puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur $7\times\frac{3}{4}$. $7\times\frac{3}{4} = ...$



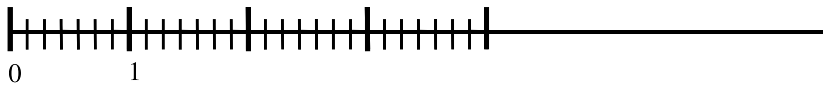
d) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{8}{7}$ unité,



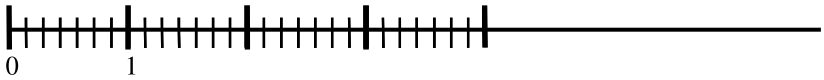
puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur $3\times\frac{8}{7}$ unités. $3\times\frac{8}{7} = ...$



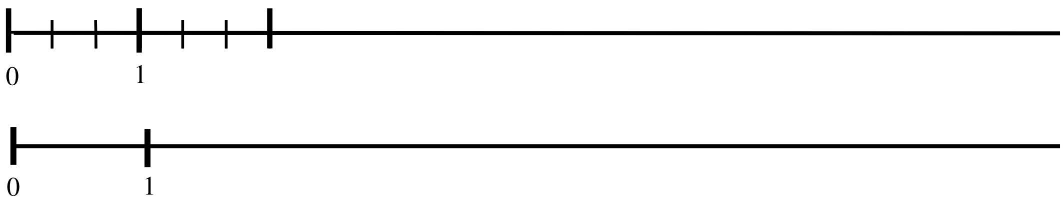
e) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{11}{7}$ unité,



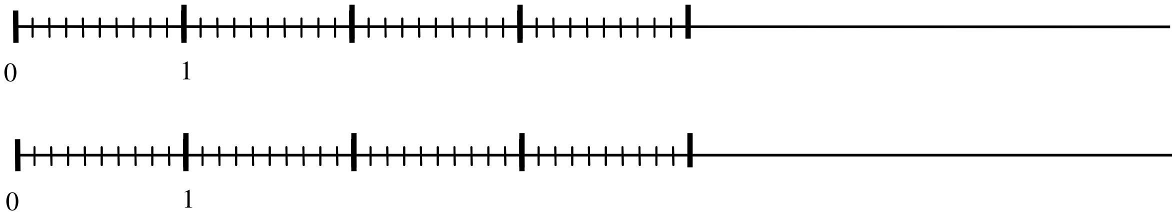
puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur $5 \times \frac{11}{7}$ unités. $5 \times \frac{11}{7} = \ldots$



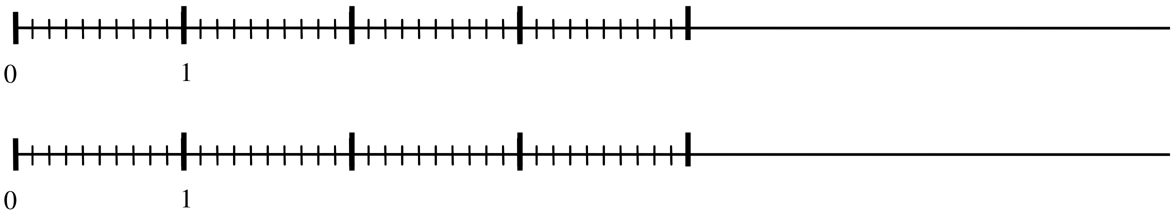
f) Colorie sur la première droite graduée un segment de longueur $\frac{7}{3}$ unités, puis sur la seconde droite graduée un segment de longueur double. Le double de $\frac{7}{3}$ unités est ….



g) Colorie un segment de longueur $\frac{7}{10}$, puis un de $7 \times \frac{7}{10}$ sur la 2ème droite.$7 \times \frac{7}{10} = \ldots$



h) Colorie un segment de longueur $\frac{23}{10}$, puis un de $3 \times \frac{23}{10}$ sur la 2ème droite. $3 \times \frac{23}{10} = \ldots.$



i) Effectue :

$\mathbf{6 \times \frac{3}{5} =}$	$\mathbf{5 \times \frac{12}{7} =}$	$\mathbf{3 \times \frac{3}{4} =}$	$\mathbf{11 \times \frac{5}{6} =}$
$\mathbf{9 \times \frac{7}{2} =}$	$\mathbf{15 \times \frac{6}{11} =}$	$\mathbf{8 \times \frac{2}{3} =}$	$\mathbf{2 \times \frac{21}{4} =}$
$\mathbf{35 \times \frac{5}{11} =}$	$\mathbf{708 \times \frac{79}{3} =}$	$\mathbf{28 \times \frac{5}{13} =}$	$\mathbf{97 \times \frac{309}{11} =}$
$\mathbf{1 \times \frac{56}{3} =}$	$\mathbf{46 \times \frac{63}{8} =}$	$\mathbf{78 \times \frac{3}{207} =}$	$\mathbf{7 \times \frac{1}{98} =}$

II- Multiplication d'un décimal par un entier :

a) $3 \times \frac{23}{10} = \frac{3 \times 23}{10} = \frac{69}{10}$. On aurait pu utiliser l'écriture décimale : $3 \times 2{,}3 = 6{,}9$.

Effectue les opérations suivantes en utilisant l'écriture décimale.

opération en écriture fractionnaire	opération en écriture décimale et résultat	opération en écriture fractionnaire	opération en écriture décimale et résultat
$\mathbf{16 \times \frac{2036}{100}}$		$\mathbf{68 \times \frac{587}{10}}$	
$\mathbf{97 \times \frac{457}{1000}}$		$\mathbf{49 \times \frac{207}{1000}}$	
$\mathbf{512 \times \frac{25}{10000}}$		$\mathbf{78 \times \frac{398}{10}}$	

b) Calcule comme précédemment :

$79 \times 3{,}205 =$ **$47 \times 0{,}98 =$** **$64 \times 0{,}025 =$** **$59 \times 2{,}007 =$**
$56 \times 68{,}7 =$ **$97 \times 0{,}007 =$** **$69 \times 65 =$** **$97 \times 0{,}1 =$**
$98 \times 9{,}45 =$ **$25 \times 1{,}6 =$** **$79 \times 100 =$** **$987 \times 0{,}005 =$**

c) Calcule astucieusement :

$0{,}5 \times 2 =$ **$0{,}5 \times 79 \times 2 =$** **$5 \times 67 \times 0{,}2 =$** **$2{,}5 \times 76 \times 4 =$**
$0{,}25 \times 97 \times 4 =$ **$20 \times 87 \times 0{,}5 =$** **$25 \times 908 \times 0{,}4 =$** **$25 \times 8{,}9 \times 4 =$**

d) On sait que $225 \times 18 = 4050$. Tu dois pouvoir trouver les produits suivants sans faire d'opération.

$22{,}5 \times 18 =$ **$2{,}25 \times 18 =$** **$225 \times 180 =$**
$2250 \times 0{,}18 =$ **$0{,}225 \times 18 =$** **$2{,}25 \times 180 =$**

On sait que $158 \times 47 = 7426$. Calcule sans faire d'opération.

$15{,}8 \times 47 =$ **$158 \times 0{,}047 =$** **$15{,}80 \times 47 =$**
$158 \times 4{,}7 =$ **$1580 \times 4{,}7 =$** **$1{,}5800 \times 47 =$**

Situation 6 : Division et multiplication

La division est une opération en cours d'apprentissage. Beaucoup d'élèves n'en maîtrisent encore ni la technique, ni même le sens, hésitant entre une multiplication et une division pour résoudre un problème.

Pendant longtemps les élèves n'ont connu que la division euclidienne qu'ils utilisaient pour résoudre des problèmes de partage où la plupart du temps le dividende était supérieur au diviseur. Dans le cas contraire, le quotient était nul et le partage impossible, ce que les élèves ont identifié au fait qu'" il est impossible de diviser un nombre par un nombre plus grand ". Ce n'est qu'en fin de cycle 3 avec l'introduction des décimaux qu'il est devenu possible de diviser un nombre par un nombre plus grand, mais le " théorème-élève " précédemment installé est résistant. A l'entrée en sixième, beaucoup d'élèves ont encore tendance quand ils divisent, à diviser le " grand nombre " par le " petit nombre " et à ne pas vérifier la cohérence du résultat. Cette résistance n'est pas la seule ! On trouve par exemple des élèves qui divisent systématiquement le premier nombre présent dans l'énoncé par le second, d'autres qui effectuent la division dans le sens qui leur paraît le plus facile.

Aussi, avant d'aborder la fraction quotient, il est nécessaire de doter les élèves de moyens de vérification afin de déterminer :

- si l'opération choisie est appropriée à la résolution d'un problème ;
- si, dans le cas où cette opération est une division, elle est effectuée dans le bon " sens ".

1) **Durée :** 2 séances de 55 minutes + exercices.

2) **Apprentissages visés :**

- Reconnaître le calcul à effectuer pour résoudre un problème (multiplication ou division).
- Savoir qu'il est possible de diviser un nombre par un nombre plus grand.
- Savoir que diviser a par b ne conduit pas au même résultat que diviser b par a (la division n'est pas commutative).
- Vérifier le résultat d'une division en effectuant une multiplication.

3) **Description de l'activité :**

Dans la première séance, les élèves résolvent successivement trois problèmes dont la solution est un quotient d'entiers : dans le premier problème, plusieurs procédures sont utilisables. Dans le second, la multiplication à trou et la division sont encore commodes. Dans le troisième, seule la division permet d'obtenir la solution dans un temps raisonnable.

La synthèse fait apparaître la division comme l'opération permettant la détermination du terme manquant dans une multiplication à trou.

Dans la deuxième séance, le lien entre la multiplication et la division est renforcé : les élèves mettent en relation, d'abord dans des problèmes " concrets " puis dans des résolutions d'équations, l'opération conduisant au résultat et l'opération à effectuer pour en vérifier l'exactitude.

4) Matériel :

Séance 1 : Pour chaque élève :

- une calculatrice (suivant les exercices).

Séance 2 : Pour chaque élève :

- une photocopie des exercices de l'annexe 1.

5) Déroulement :

Séance 1 : multiplication à trou et division

- Phase 1 :

L'objectif est de faire l'inventaire des procédures disponibles chez les élèves pour résoudre un problème relevant de la division.

Le professeur écrit au tableau l'énoncé suivant :

" 5 stylos coûtent 4 €. Quel est le prix d'un stylo ? ".

Les élèves le recherchent individuellement, avec ou sans calculatrice, et doivent écrire ce qu'ils font. Les différentes réponses sont collectées. Après quoi pour chacune des propositions, en commençant par celles qui sont erronées, le professeur demande aux élèves de présenter les différentes démarches utilisées et comment faire pour en vérifier l'exactitude.

Les procédures, exactes ou erronées, envisageables sont :

- *le recours à des essais multiplicatifs ou additifs ;*
- *l'emploi de la division de 4 par 5 ;*
- *l'emploi de la division de 5 par 4 ;*
- *plus rarement, l'utilisation de la soustraction ou une résolution prenant appui sur un dessin.*

Les arguments qui peuvent être sollicités au cours du débat de validation sont :

- *L'utilisation d'un ordre de grandeur, éventuellement conjugué avec un dessin représentant la situation. Le prix d'un stylo ne peut pas être 1,25 € car si un stylo coûte plus d'un euro, 5 stylos coûtent plus de 5 €. De même le prix d'un stylo ne peut pas être 20 € (5×4) car un stylo est alors plus cher que cinq. Si le recours à un dessin n'est pas proposé par les élèves, le professeur l'introduira au moment opportun pour emporter la conviction de tous les élèves.*
- *La signification des opérations, en référence aux grandeurs sur lesquelles elles portent. Quel sens donner à l'addition ou à la soustraction, de 5 (stylos) et de 4 (€) ?*

- *La référence à une classe de problèmes du type “ prix-quantité ” où le prix s’obtient en multipliant le prix unitaire par la quantité : 5 × 1,25 peut-il être égal à 4 ?*

Le débat se termine par le rappel des procédures exactes utilisables dans ce problème :

- addition réitérée (essais additifs de cinq nombres identiques) ;
- multiplication à trou (essais multiplicatifs qu'on codera 5 × … = 4) ;
- division de 4 par 5.

Et, les moyens utilisables pour valider une solution ou une procédure :

- schématisation de la situation qui peut aider à déterminer l’ordre de grandeur de la réponse (le prix d’un stylo ne peut pas être supérieur à 1€) ;
- détermination d’un ordre de grandeur qui conduit à éliminer la division de 5 par 4 pour laquelle le quotient est supérieur à 1 ;
- référence à une classe de problèmes du type “ prix-quantité ”.

Le professeur mettra en évidence que dans une division, intervertir le dividende et le diviseur modifie le résultat. 5 : 4 = 1,25 alors que 4 : 5 = 0,8.

- Phase 2 :

Cette phase permet d’entraîner les élèves aux différents moyens de validation précédemment répertoriés.

Le déroulement est identique au premier temps, le problème est le suivant :

“ Un commerçant transvase 32 L d’huile dans 25 flacons identiques. Quelle quantité d’huile contient chaque flacon ? ”.

Les nombres sont choisis pour mettre en défaut certaines procédures de résolution trop rudimentaires (utilisation de l’addition réitérée) et privilégier le recours à la multiplication à trou ou à la division. La taille des nombres autorise encore l’utilisation d’un dessin. Il peut aider les élèves à se représenter la situation, pour déterminer un ordre de grandeur du résultat (plus petit ou plus grand que 1).

Les deux nombres entiers sont choisit suffisamment proches l’un de l’autre pour rendre possible le choix des deux divisions (32 : 25 et 25 : 32), et de manière à ce que chacune des divisions donne un quotient décimal exact (0,78125 et 1,28). Dans un problème du genre : “ Un voyage en Espagne coûte 7584 € pour une classe de 24 élèves. Quel est le prix payé par chaque élève ? ”, l’écart entre les nombres est tel que le doute n’est pas permis, seule la division de 7584 par 24 est crédible.

En conclusion, le professeur rappelle les différentes procédures exactes permettant de résoudre ce problème (multiplication à trou : 25 × … = 32 ou division de 32 par 25) ainsi que les différents moyens de validation (ordre de grandeur, problème de référence “ prix-quantité ”, reporter le quotient de 32 par 25 dans l’égalité à trou) en faisant une place particulière à ce dernier.

- Phase 3 :

Le quotient est cette fois-ci suffisamment complexe pour rendre fastidieuse la procédure consistant à faire des essais multiplicatifs qu'on ajuste, et ainsi favoriser le recours à la division.

Le déroulement est identique aux deux premières phases. Le problème est le suivant :

“ Un transport de marchandises coûte 325 € pour une distance de 520 km. Quel est le prix au km ? ”

Comme pour le problème précédent, les nombres retenus permettent le choix entre deux divisions conduisant chacune à un quotient décimal exact.

- Institutionnalisation **:**

  - **Il est possible de diviser un nombre par un nombre plus grand (le résultat est alors inférieur à 1).**
  - **Dans une division, intervertir le dividende et le diviseur modifie le résultat.**
  - **Le facteur manquant dans une multiplication à trou est obtenu en effectuant une division.**

  Dans un problème qui se résout par une division :

  - **avec les données de l'énoncé, il est possible d'effectuer deux divisions, mais une seule convient en réponse au problème posé ;**
  - **pour vérifier si on fait la “ bonne ” opération, on peut :**
    - **utiliser un ordre de grandeur du résultat (plus petit ou plus grand que 1). Par exemple, dans le problème où on paie 325 € pour 520 km, si 1 km coûtait 1 €, 520 km coûteraient 520 €. C'est trop, donc 1 km coûte moins de 1 €.**
    - **multiplier la valeur unitaire obtenue par la quantité et voir si on obtient la valeur totale. Ainsi, dans le problème où 5 stylos coûtent 4 €, si le prix d'un stylo était 1,25 € (5 : 4), 4 stylos coûteraient 5 € (1,25 x 4 = 5) et non 4 €.**

Séance 2 : multiplication, division et vérification

Cette séance a pour but de renforcer le lien entre multiplication et division, à travers des problèmes “concrets” pour les trois premiers exercices, et dans un cadre purement numérique pour le dernier.

L'annexe qui se compose de quatre exercices est distribuée aux élèves

- Exercice 1

Il s'agit d'écrire 3 problèmes qui utilisent 2 nombres de l'énoncé, le 3ème devant être la réponse. Le travail est individuel, les élèves ne disposent pas de la calculatrice.

Le professeur repère les difficultés et sélectionne quelques travaux d'élèves en fonction de l'intérêt qu'ils présentent :

– le problème rédigé contient les 3 données numériques ;

– le calcul proposé est inadapté au problème ;

– sans oublier quelques productions correctes.

Pour chaque production soumise à discussion, la mise en commun commence si nécessaire par une amélioration de la forme des textes proposés. Ceci, est à faire rapidement, pour qu'ensuite les échanges puissent être centrés sur le savoir mathématique en jeu.

- Exercice 2

Le même travail est repris.

Au terme de la mise en commun, l'accent est mis sur le fait qu'à une multiplication correspondent deux divisions, qu'à un problème multiplicatif correspondent deux problèmes de division.

- Exercice 3

Le choix est fait de retarder le moment où les calculs sont effectués. Ceci afin que les élèves anticipent et développent des phases de contrôle, pour le choix aussi bien de l'opération conduisant à la réponse, que de l'opération permettant la vérification. Ainsi ils travaillent le lien entre multiplication et division.

Les calculs n'étant pas effectués immédiatement, il faut trouver un moyen pour désigner le prix d'un carambar, dans l'opération à effectuer et dans sa vérification.

Le premier problème est traité collectivement après une brève recherche individuelle.

“ 10 rochers chocolatés coûtent 5 €. Quel est le prix d'un rocher chocolaté ? ”

Les propositions de calcul et de vérification à effectuer sont collectées. La question de la désignation de la réponse (inconnue) au problème dans le calcul à effectuer pour en vérifier l'exactitude est alors abordée. La classe peut se mettre d'accord sur l'emploi d'un symbole ou d'une lettre.

Par exemple :	*Calcul à effectuer :*	*Vérification :*
	$5 : 10 = ?$	$? \times 10 = 5$
	$5 : 10 =$	$\times 10 = 5$
	$5 : 10 = R$	$R \times 10 = 5$

L'emploi d'un symbole ou d'une lettre pour désigner le nombre inconnu rend plus lisible le lien entre multiplication et division.

Les différentes propositions de calcul et de vérification à effectuer sont ensuite débattues en référence à la situation.

Par exemple :
Pour la détermination de l'opération conduisant à la réponse,

– *l'opération à effectuer n'est pas une multiplication car c'est la totalité des 10 rochers qui coûte 5 € et non pas chacun d'entre eux ;*

– *ce ne peut pas être 10 x 5 car alors un rocher coûterait plus cher que 10 rochers ;*

– *ce ne peut pas être 10 : 5, cette division conduit à un nombre plus grand que 1, et 10 rochers coûteraient alors plus de 5 €.*

Pour la vérification :

- *le montant de la dépense s'obtient en multipliant le prix d'un rocher par le nombre de rochers achetés ;*
- *pour terminer, le calcul retenu est effectué ainsi que la vérification correspondante.*

  Les élèves traitent ensuite individuellement les trois exercices suivants sans effectuer les calculs. Lorsqu'ils ont terminé, ils comparent leur production avec leur voisin et doivent se mettre d'accord sur une proposition de calcul et de vérification. Ensuite seulement, ils utilisent la calculatrice pour effectuer calculs et vérifications.

Pour que les élèves demeurent attentifs au sens de la situation, on peut ajouter un énoncé où l'opération nécessaire à la résolution du problème n'est plus la division mais la multiplication.

Par exemple :
“ Je veux faire 7 paquets identiques de 98 dragées chacun. Combien me faut-il de dragées ? ”

- Exercice 4 : Des équations a × ? = b ou ? × a = b.

Dans cet exercice sans contexte, il s'agit d'écrire le calcul qui conduit à la solution, de déterminer la solution et d'en vérifier l'exactitude (calculatrice autorisée et même recommandée). Toutes les équations, à l'exception d'une, font intervenir la multiplication ou la division.

Exercice 1 : *Voici une situation : "Lors d'un tournoi de football, il y a 176 joueurs inscrits, c'est-à-dire 16 équipes de 11 joueurs ".*

Écrire 3 problèmes reprenant cette situation en utilisant 2 nombres de l'énoncé et de sorte que le 3ème nombre soit la réponse au problème.

Pour chaque problème, écrire le calcul qui permet d'obtenir la réponse.

Exercice 2 : *Voici une situation : "Un paquet de bonbons coûte 12 €, il contient 24 bonbons à 0,50 € l'un ".*

Écrire 3 problèmes reprenant cette situation en utilisant 2 nombres de l'énoncé et de sorte que le 3ème nombre soit la réponse au problème.

Pour chaque problème, écrire le calcul qui permet d'obtenir la réponse.

Exercice 3 :

Voici des problèmes. Écrire en ligne le calcul qui conduit à la réponse, sans l'effectuer.

Écrire ensuite le calcul à effectuer pour vérifier l'exactitude de la réponse et quel doit être le résultat de ce calcul.

Enoncé du problème	Calcul qui conduit à la réponse	Vérification
100 carambars coûtent 8 €. Quel est le prix d'un carambar ?	………. ………. =	……. …….. = ……….
Je vends mes œufs par boîtes de 12. J'ai 96 œufs à vendre aujourd'hui. Combien me faut-il de boîtes ?	………. ………. =	……. …….. = ……….
1 mètre de corde vaut 0,9 €. Combien de mètres mesure une corde qui vaut 225 € ?	………. ………. =	……. …….. = ……….
32 000 grains de sable (tous identiques) pèsent 800 grammes. Combien pèse un seul grain de sable ?	………. ………. =	……. …….. = ……….

Exercice 4 :

Voici des opérations à trou appelées aussi équations. Il s'agit de trouver le nombre inconnu. Écrire le calcul qui permet de trouver ce nombre. Avec la calculatrice, effectuer ce calcul ainsi que la vérification.

	Calcul à effectuer pour trouver le nombre inconnu	Vérification
0,6 × .... = 9		
.... × 50 = 0,6		
3,58 × .... = 19,332		
.... : 4 = 7,2		
.... + 12,5 = 40		
.... × 4,5 = 81		
56 × .... = 716,8		
.... : 0,27 = 14		

Situation 7 : Fraction quotient

Les élèves viennent de l'école primaire en ayant travaillé la division d'un entier par un entier et la division d'un décimal par un entier. Le quotient est soit entier, soit décimal (exact ou approché), mais en aucun cas une écriture fractionnaire. $\frac{8}{3}$ n'a pas d'existence en tant que quotient de 8 par 3. Dans ce contexte de division, l'écriture $\frac{8}{3}$ n'a pas été rencontrée et n'a pas le statut de nombre.

1) **Durée :** 4 séances de 55 minutes.

2) **Apprentissages visés :**

- Produire une écriture fractionnaire pour exprimer un quotient (tout quotient n'est pas décimal).
- Déterminer la solution (fractionnaire) de l'équation $a \times \ldots = b$ où a et b sont des entiers donnés.
- Différencier quotient exact et quotient approché.

3) **Description de l'activité :**

Pendant la première séance, les élèves travaillent seuls. Ils doivent répartir entre trois personnes, et de façon équitable, un certain nombre de bandes unités. Ils déterminent la valeur d'une part et expliquent comment ils ont procédé. Les résultats et méthodes sont comparés en groupe puis validés en classe entière.

Dans la seconde séance, le professeur propose de chercher le résultat exact de la division de 8 par 3. Les différentes propositions sont recensées et validées par retour à la multiplication. La classe institutionnalise que $8 : 3 = \frac{8}{3}$.

Une série d'exercices est proposée dans la troisième séance. Les élèves doivent rechercher à chaque fois, la valeur exacte du résultat.

Dans la quatrième séance, les élèves cherchent à résoudre différents problèmes dans lesquels il faut effectuer la division 17 : 7, mais dont la réponse, quand ce n'est pas $\frac{17}{7}$, doit être choisie parmi des valeurs approchées.

4) **Matériel :**

Séance 1 : Pour chaque élève :

- une paire de ciseaux, colle, ruban adhésif ;
- l'annexe 1.

Séances 2 et 3: Pour le professeur :

- un bout de ficelle " de longueur 8 unités ".

Pour chaque élève :

- l'annexe 2 (à distribuer en fin de séance 2).

Séance 4 : Pour chaque élève :

- une demi-feuille annexe 3.

5) Déroulement :

Séance 1 : Partage de plusieurs unités

- Phase 1 : La règle n'est pas autorisée. Chaque élève découpe 2 bandes unités. Le professeur donne la consigne : “ Vous devez partager, ces 2 unités de façon équitable entre trois personnes, Alain, Betty, et Clarisse. Quelle est la part de chacun ? Vous collerez une des parts obtenues sur la feuille réponse, et vous expliquerez comment vous avez fait. Vous garderez les autres parts pour pouvoir comparer avec vos camarades ”. La mise en commun porte sur les différentes procédures utilisées : Quelles sont-elles ? Les quantités obtenues sont-elles identiques ? Comment peut-on les exprimer ?

Les élèves ont recours au pliage ou au guide-âne. Certains découpent chaque unité en trois morceaux identiques et en collent deux (2 fois 1/3 d'unité) ; d'autres, incités par la présentation groupée par 2 des bandes de l'annexe 1 coupent directement la bande de deux unités en trois morceaux identiques et en collent un (1/3 de 2 unités).

Le but de cette activité est de montrer que, quelle que soit la méthode de partage utilisée, on obtient des parts équivalentes que l'on peut exprimer par une même fraction de bande unité.

- Institutionnalisation :

  - **Quand on partage équitablement 2 unités entre trois personnes chacune d'elles reçoit $\frac{2}{3}$ d'unité.**

  - **Pour donner $\frac{2}{3}$ d'unité :**
    - **on peut donner deux fois $\frac{1}{3}$ d'unité.**
    - **ou bien on peut donner $\frac{1}{3}$ de deux unités.**

$$\boxed{\frac{2}{3} \text{ c'est } 2 \times \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{3} \text{ de } 2}$$

- Phase 2 : Les élèves découpent 8 bandes unités et les partagent équitablement entre 3 personnes. Les différentes procédures utilisées sont reprises.

Si certains élèves reprennent les procédures utilisées à la phase 1 (soit, en commençant par découper chaque bande unité en trois, soit en commençant par scotcher 8 bandes bout à bout), d'autres préfèrent ici distribuer trois fois deux bandes et partager les 2 bandes restantes en trois parts identiques. Si cette méthode n'apparaît pas, le professeur peut faire “ jouer ” à 4 élèves la scène du partage.

La synthèse fera apparaître que :

$$\frac{8}{3} \text{ c'est } 8 \times \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{3} \text{ de } 8 \text{ mais c'est aussi } 2 + \frac{2}{3}$$

Le partage proposé dans cette activité est volontairement proche de la division euclidienne rencontrée en primaire. Cependant, pour la plupart des élèves, le partage de 8 bandes entre 3 personnes demeure une situation concrète, particulière. Elle est très éloignée de leur représentation de la division du ***nombre*** *8 par le* ***nombre*** *3 qui n'est souvent rien d'autre qu'un algorithme.*

Séance 2 : Division d'un entier par un entier

Le professeur demande : " Quel est le résultat exact de la division 8 : 3 ? "

Les différentes propositions sont recensées, les réponses sont validées ou invalidées par retour à la multiplication par 3 (faite à la main).

Tout d'abord, les élèves proposent essentiellement des réponses décimales, il est important de prendre le temps de les invalider toutes, pour que chacun prenne bien conscience que la réponse n'est pas un décimal.

Il se peut qu'un élève propose de recourir à la calculatrice, on peut alors comparer le résultat donné par la calculatrice et le résultat obtenu à la main. On en conclut que la calculette n'affiche pas le résultat exact.

Il est possible que certains en déduisent qu'il n'existe pas de réponse exacte. Le professeur peut alors relancer le débat en montrant qu'il est toujours possible de couper une ficelle longue comme 8 unités, en 3 morceaux de même longueur, sans qu'il ne reste rien.

La réponse $\frac{8}{3}$ *est validée par le calcul* $3 \times \frac{8}{3} = 3 \times (8 \times \frac{1}{3}) = \frac{24}{3} = 8$.

- Institutionnalisation :
  - ♦ **Le quotient de 8 par 3 est le nombre qui multiplié par 3, donne 8. Ce n'est pas un nombre décimal, on le note** $\frac{8}{3}$**.**

$$8 : 3 = \frac{8}{3} \qquad \text{car} \qquad 3 \times \frac{8}{3} = 8$$

Séance 3: Exercices

Les élèves doivent chercher les exercices de l'annexe 2 (ils peuvent déjà être proposés en fin de séance 2). Dans les six premiers exercices, on demande d'exprimer la réponse en donnant la valeur exacte.

Il est utile de préciser aux élèves que la réponse à fournir n'est pas forcément celle qui serait la plus appropriée dans la vie courante.

Dans l'exercice 7, l'équation, la division, le quotient en écriture fractionnaire ou décimale, sont alternativement proposés, il s'agit de retrouver les autres éléments demandés.

- Institutionnalisation :

  - **Le quotient d'un entier a par un entier b différent de 0 est le nombre qui multiplié par b donne a. Ce n'est pas forcément un décimal.**
  - **$\frac{a}{b}$ est le nombre qui vérifie $b \times \ldots\ldots = a$.**
  - **$\frac{a}{b}$ est la valeur exacte de a : b.**

$$\boxed{a : b = \frac{a}{b} \qquad \text{car} \qquad b \times \frac{a}{b} = a}$$

Séance 4 : Valeur exacte, valeurs approchées

Les élèves connaissent déjà la signification de valeur exacte. Le but de cette activité est de montrer que celle-ci n'est pas forcément la "bonne" réponse dans un contexte donné, et de justifier ainsi l'utilisation de valeurs approchées.

Les élèves cherchent les cinq problèmes suivants (annexe 3). Ils doivent fournir la réponse qui leur semble la plus appropriée dans la vie courante.

a) On partage de manière équitable 17 billes entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?

b) On partage de manière équitable 17 euros entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?

c) On partage de manière équitable 17 bandes unités entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?

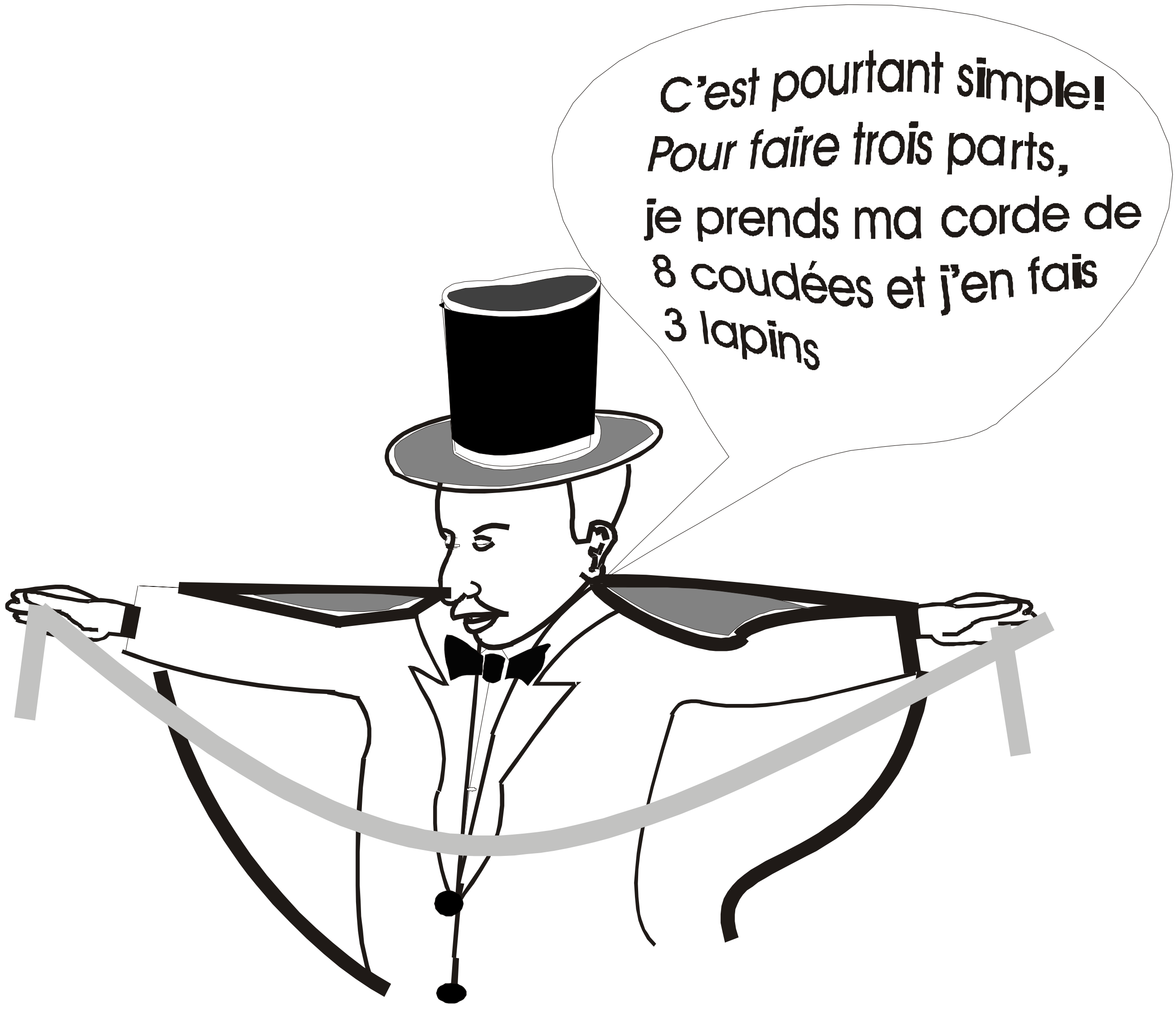
d) Un camion peut contenir 7 t. Combien de voyages devra-t-il effectuer pour évacuer 17 t de terre ?

e) Quel est le quotient exact de17 par 7 ?

Les différents résultats sont recensés et discutés. Le débat fera apparaître qu'à chaque fois, l'opération à effectuer est la division 17 : 7, mais que la solution retenue dépend du problème.

- Institutionnalisation :

  - **Lorsqu'on pousse de plus en plus loin le calcul de la division de 17 par 7, on s'approche de plus en plus du quotient de 17 par 7. Les nombres ainsi obtenus sont des valeurs approchées.**
  - **Une valeur exacte peut être approchée par défaut, par excès, à l'unité près, au dixième près...**
  - **Suivant les données d'un problème " à division ", la solution peut être la valeur exacte du quotient ou une de ses valeurs approchées.**


C'est pourtant simple!
Pour faire trois parts,
je prends ma corde de
8 coudées et j'en fais
3 lapins

Des bandes unités

UNITE

UNITE	UNITE
UNITE	UNITE
UNITE	UNITE
UNITE	UNITE
UNITE	UNITE

Fiche réponse

Colle ici la part obtenue par Alain, lorsque tu as partagé 2 bandes unité entre 3 personnes	Explique ici comment tu as fait pour partager

Cette part correspond à ………………… unité

Colle ici, en la pliant, la part obtenue par Clarisse lorsque tu as partagé 8 bandes unité entre 3 personnes.	Explique ici comment tu as fait pour partager

Cette part correspond à ………………… unité

Exercices

La calculatrice n'est pas autorisée

1. On désire couper en 6 morceaux identiques une ficelle de 5 unités de long. Quelle est la mesure exacte de chaque morceau ? Quel calcul faut-il faire pour vérifier ?
2. Julie, Youssef, et Laurie ont acheté 5 pizzas. Ils les ont partagées équitablement et les ont toutes mangées. Quelle a été la part de chacun ? Quel calcul faut-il faire pour vérifier ?
3. Une tablette de chocolat de 100 g est constituée de 12 carreaux. Combien pèse un carreau ? Quel calcul faut-il faire pour vérifier ?
4. Avec un tonneau de 75 L, on peut remplir 100 bouteilles identiques. Quelle est la contenance d'une bouteille ? Quel calcul faut-il faire pour vérifier ?
5. Cinquante personnes se partagent équitablement 915 €. Quelle est la somme que chacun reçoit ? Quel calcul faut-il faire pour vérifier ?
6. Voici des énoncés de problème : Retrouver la réponse de chaque problème parmi les nombres suivants : $\frac{8}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{10}{7}$; 0,7.

A / Paul a coupé une tarte en 8 morceaux identiques, il en a mangé 3. Quelle part a-t-il mangé ?	B/ Avec 7 €, j'ai acheté 10 m de ficelle. Quel est le prix d'un mètre ?	C/ Un pack de 8 boîtes de soda identiques pèse 3 kg. Combien pèse une boîte ?
D/ Avec 21 bouteilles de 1 L d'eau, j'ai rempli 30 carafes. Quelle est la contenance d'une carafe ?	E/ 3 kg de tomates coûtent 8 €. Quel est le prix du kg ?	F/ Dans un rouleau de tapisserie de 10 mètres de long, je peux faire 7 lés identiques sans qu'il ne reste rien. Quelle est la longueur d'un lé ?

7. Compléter :

$3 \times \ldots\ldots = 1$	$\ldots\ldots \times \frac{5}{4} = 5$	$\ldots\ldots : \ldots\ldots = \frac{7}{6}$	$\frac{8}{3} = \ldots\ldots : \ldots\ldots$
$\ldots\ldots : \ldots\ldots = \frac{2}{5}$	$10 \times \ldots\ldots = 2$	$3 : 24 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	$3 : 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots \times 5 = 4$	$14000 \times \ldots\ldots = 14$	$25 : 1000 = \ldots\ldots$	$1000 : 25 = \ldots\ldots$
$1000 \times \ldots\ldots = 25$	$\ldots\ldots \times 10 = 3$	$\ldots\ldots : \ldots\ldots = 0{,}8$	$\ldots\ldots \times 0 = 5$

Problèmes

Enoncés	opération	Réponse de la vie courante.
a) On partage de manière équitable 17 billes entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
b) On partage de manière équitable 17 euros entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
c) On partage de manière équitable 17 bandes unités entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
d) Un camion peut contenir 7 t. Combien de voyages devra-t-il effectuer pour évacuer 17 t de terre ?		
e) Quel est le quotient exact de 17 par 7 ?		

Problèmes

Enoncés	opération	Réponse de la vie courante.
a) On partage de manière équitable 17 billes entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
b) On partage de manière équitable 17 euros entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
c) On partage de manière équitable 17 bandes unités entre 7 personnes. Quelle est la part de chacun ?		
d) Un camion peut contenir 7 t. Combien de voyages devra-t-il effectuer pour évacuer 17 t de terre ?		
e) Quel est le quotient exact de 17 par 7 ?		

Situation 8 : Fractions de surface

Pour illustrer le concept de fraction partage et afin de pouvoir comparer facilement des fractions, les élèves ont jusqu'à présent partagé des segments unités. L'étude de la notion d'aire peut être l'occasion de reprendre avec les surfaces la notion de fraction abordée avec les segments : en particulier, d'illustrer à nouveau le passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale.

1) **Durée** : 2 séances de 55 minutes.

2) **Apprentissages visés :**

- Construire des fractions de surface unité. Représenter des nombres décimaux par des fractions de surface.
- Comparer des nombres en écriture fractionnaire et en écriture décimale.

3) **Description de l'activité :**

Les élèves doivent tout d'abord découper des formes différentes dont l'aire est $\frac{1}{4}$ de l'aire du rectangle unité. Les différentes formes obtenues sont répertoriées, et leurs aires sont comparées.

Le même travail est proposé avec d'autres fractions (1/6 , 1/10 , 1/100). Chaque élève doit alors construire une figure dont l'aire est 0,78 unité.

Dans un deuxième temps, les élèves disposent de tablettes unités divisées en 100 carreaux identiques ; ils doivent représenter par coloriage différents nombres (donnés en écriture décimale ou fractionnaire) ; ils doivent ensuite retrouver les nombres égaux en comparant les aires. Ils vérifient leurs résultats en groupe, puis doivent les valider en calculant les quotients.

4) **Matériel :**

Séance 1 : Pour chaque élève :

- différents rectangles unités (On peut par exemple couper une feuille A4 en 8 rectangles de 10,5 cm sur 7,4) ;
- un guide âne dont les lignes ne sont pas trop espacées (voir annexe 2 situation 2).

Séance 2 : Pour chaque élève :

- une photocopie de l'annexe 1.

Pour la mise en commun :

- un transparent de l'annexe 1.

5) **Déroulement :**

Séance 1 : Fractions de surfaces

- Phase 1 : Les élèves travaillent d'abord seuls, ils disposent de plusieurs rectangles unités, doivent tout d'abord découper des formes différentes dont la surface est $\frac{1}{4}$ de la surface unité. Les différentes formes sont répertoriées, pour chacune d'elles un élève vient expliquer à la classe comment il a procédé. Le professeur propose alors de comparer les aires des figures obtenues. L'égalité de celles-ci pourra être validée par découpage recollement (au rétroprojecteur éventuellement).

Pour certains élèves, les figures de formes différentes n'ont pas la même aire. Le but de cette activité et de montrer que celles qui représentent la même fraction d'unité ont des aires identiques tout en n'ayant pas forcément la même forme.

- Phase 2 : Les élèves disposent à présent d'un guide âne et de rectangles unités. Ils travaillent seuls, et doivent découper trois formes différentes dont l'aire est $\frac{1}{6}$ de l'aire du rectangle unité, puis les coller sur le cahier. (On peut éventuellement à nouveau comparer les aires des figures obtenues).

  La même consigne est ensuite proposée avec des fractions décimales (1/10 ; 1/100). Pour terminer la séance, les élèves doivent construire une forme dont la surface est 0,78 surface unité.

Jusqu'à présent les élèves n'ont partagé des bandes unités que dans le sens de la longueur. Le fait d'avoir trois formes différentes à construire impose le partage dans les deux sens, longueur et largeur. Pour obtenir $\frac{1}{6}$ d'unité on pourra donc partager : en pliant en 6 dans le sens de la longueur, en pliant en 6 dans le sens de la largeur ou en pliant en 3 dans un sens et en 2 dans l'autre sens. De même pour obtenir $\frac{1}{100}$ d'unité on pourra rencontrer des partages : 10 par 10, 5 par 20, ou 4 par 25.

Les élèves ne se sont pas servis d'un guide-âne depuis un certain temps, les partages proposés ici sont l'occasion de réutiliser cet outil (et peut-être de rappeler son mode d'emploi).

Cet exercice vise aussi à créer d'autres représentations du dixième et du centième afin d'ancrer en les illustrant une nouvelle fois les égalités du type : $0,78 = \frac{78}{100} = \frac{7}{10} + \frac{8}{100}$.

Séance 2 : Des fractions et des nombres

- Phase 1 : Le professeur distribue l'annexe 1 et présente les tablettes unités, il indique qu'elles sont prédécoupées en 5 dans le sens de la largeur, en 20 dans celui de la longueur.

  Les élèves travaillent seuls, ils doivent colorier les fractions de surface correspondant aux nombres indiqués, et peuvent utiliser le guide-âne (en particulier pour obtenir $\frac{3}{7}$ de tablette unité).

Ils comparent ensuite leurs productions par groupes de 2.

Les résultats obtenus sont validés en classe entière (au rétroprojecteur).

Souvent les élèves ont déjà travaillé en primaire avec 100 carreaux, sur des quadrillages de 10 par 10. Certains identifient le dixième à une bande de 10 carreaux, ils colorient donc spontanément une ligne ou une colonne. Afin de faire resurgir ces représentations, la tablette unité choisie ici n'est pas un carré, ses dimensions (5 par 20) obligent l'élève à faire le partage en 10 pour pouvoir donner une représentation correcte du dixième.

- Phase 2 : Le professeur propose alors de chercher les surfaces de même aire et d'écrire les égalités correspondantes. Celles-ci sont répertoriées et la validation est l'occasion de revenir aux conditions d'égalité des fractions.

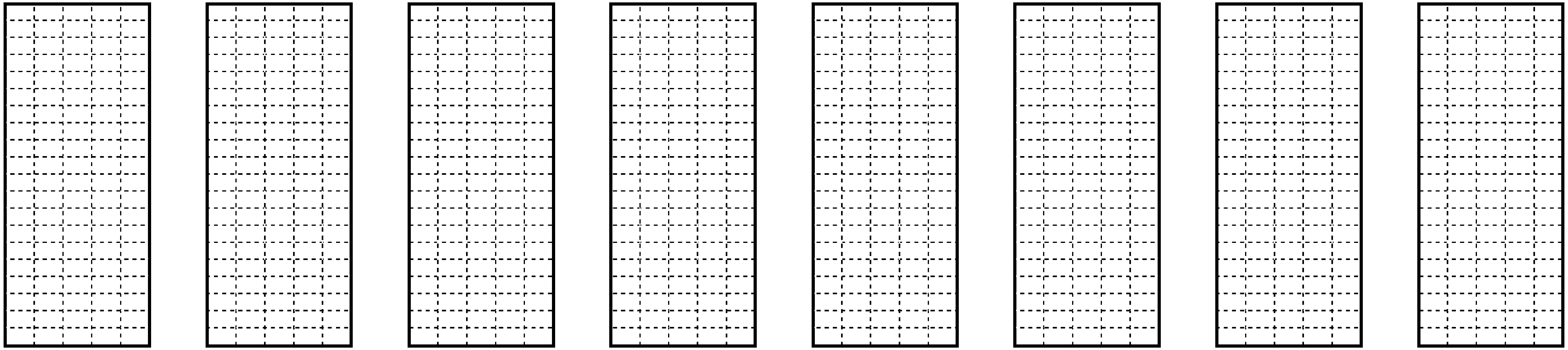
Les égalités $\frac{5}{4} = 1{,}25$; $\frac{10}{5} = 2$; $\frac{16}{20} = 0{,}8$ *sont facilement vérifiables. L'incertitude reste quant à la valeur exacte de* $\frac{3}{7}$ *est-ce 0,4 ou 0,43 ou ni l'un ni l'autre ?*

- Phase 3 : Pour terminer l'activité, les élèves effectuent les divisions : $5 \div 4$; $4 \div 5$; $16 \div 20$; $10 \div 5$; $3 \div 7$. Ils retrouvent ainsi les égalités de la phase 2. Les valeurs 0,4 et 0,43 sont des valeurs approchées de 3/7.

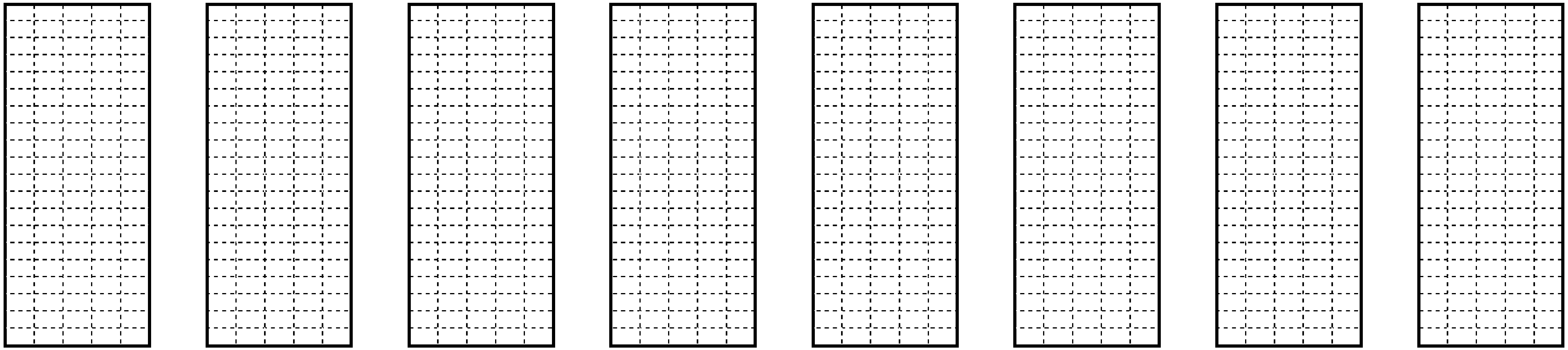
C'est l'occasion de montrer aux élèves que le dessin a ses limites.

Fractions et nombres

1) colorier



0,1 tablette unité — 0,01 tablette unité — 1,25 tablette unité — $\frac{4}{5}$ de tablette unité — 0,4 tablette unité — $\frac{5}{4}$ de tablette unité



$\frac{3}{7}$ de tablette unité — 0,8 tablette unité — 2 tablettes unités — $\frac{16}{20}$ de tablette unité — 0,43 tablette unité — $\frac{10}{5}$ de tablette unité

2) Indiquer quelles sont les surfaces de même aire.

3) Calculer les quotients : $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{16}{20}$ $\frac{10}{5}$ $\frac{3}{7}$

Situation 9 : Multiplication et aire

Le produit de deux décimaux ne figure plus dans le programme de l'école élémentaire. Il s'agit donc d'introduire cette notion, autant du point de vue du sens que de la technique. Cet apprentissage est nécessaire : en effet, il existe une rupture de sens entre le produit de deux décimaux et les cas du produit de deux naturels ou d'un décimal par un naturel, pour lesquels la référence est l'addition réitérée (exemple : 2,57 x 3 = 2,57 + 2,57 + 2,57).

La proportionnalité (voir situation 10) est l'une des occasions d'introduire la multiplication de deux décimaux. Le calcul d'aire en est une autre.

La situation décrite ici trouve sa place dans une progression sur les aires après que la distinction entre aire et périmètre ainsi que la conservation de l'aire par déplacement de surfaces ont été traitées[1]. Il vaut mieux cependant aborder cette situation avant d'avoir systématisé le calcul d'aire, mais il est nécessaire que les unités d'aires aient été introduites : en effet, le calcul d'aire proposé ici peut conduire à des changements d'unités qu'il faudra prendre en compte.

1) **Durée**: 2 séances de 55 minutes.

2) **Apprentissage visé :**

Etendre la formule donnant l'aire du rectangle lorsque les dimensions sont entières à un rectangle ayant des dimensions décimales (dans toute cette situation nous employons abusivement “ dimensions décimales ” pour désigner des dimensions autres que des nombres entiers de cm ou des demi-centimètres).

3) **Description de l'activité :**

Dans la première séance, les élèves (par groupe de deux) doivent construire, sur papier millimétré, une série de rectangles de périmètre donné. Les différentes propositions sont recensées et validées.

Dans la deuxième séance, les élèves doivent déterminer l'aire des 7 rectangles tracés en fin de séance 1. Ils ne disposent pas de calculatrice. Une mise en commun permet de lister les méthodes utilisées et de montrer l'intérêt de la multiplication des décimaux.

4) **Matériel:**

<u>Séance 1</u> : Pour chaque élève :

- une feuille de papier millimétré (à couper en deux) ;
- la règle, le crayon et la gomme.

<u>Séance 2</u> : Pour chaque élève :

- la demi-feuille de papier millimétré sur laquelle il a tracé les 7 rectangles de la séance 1.

[1] Voir la brochure IREM : Le tour de l'aire au collège - G.Combier et M.Philippon - septembre 94

Pour la classe :

- une feuille de papier millimétré agrandie, photocopiée sur transparent, et où figurent 7 rectangles (annexe 1).

5) Déroulement:

Séance 1 : Construction de rectangles de périmètre donné

- *Consigne :* “ Par groupe de deux, vous devez sur une feuille de papier millimétré dessiner six rectangles dont le périmètre est 10 cm. Vous utilisez les lignes du quadrillage. Tous les rectangles doivent être différents donc ils ne doivent pas avoir les mêmes dimensions, que la longueur soit placée sur les lignes horizontales ou sur les lignes verticales ”.

Les élèves construisent rapidement les rectangles de dimensions entières puis passent aux demi-centimètres et plus difficilement aux dimensions décimales. Nous émettons l'hypothèse que le passage de rectangles de dimensions entières à un ou à des rectangles de dimensions décimales facilitera le transfert de la multiplication des entiers à celle des décimaux.

Le nombre de rectangles (6) et le fait qu'ils sont tous différents impose qu'il y ait des mesures décimales autres que des demis.

Le professeur laissera suffisamment de temps pour qu'un grand nombre d'élèves réussissent à construire un rectangle de dimensions décimales. Il interviendra en cas de blocage persistant.

Les propositions sont recensées et validées.

En fin de séance, en travail à la maison, le professeur demande aux élèves de tracer 7 figures dont le périmètre est 10 cm :

- rectangle n°1 : de 3 cm par 2 cm
- rectangle n°2 : de 0,5 cm par 4,5 cm
- un carré de 2,5 cm de côté
- rectangle n°3 : de 2,4 cm par 2,6 cm
- rectangle n°4 : de 2,3 cm par 2,7 cm
- rectangle n°5 : de 2,2 cm par 2,8 cm
- rectangle n°6 : de 2,9 cm par 2,1 cm

Les élèves doivent les tracer sur la deuxième demi-feuille de papier millimétré.

Séance 2 : Aire et multiplication

Les élèves disposent de la feuille où ils ont tracé les 7 rectangles demandés en fin de séance 1.

- Le professeur rappelle ce qu'est un cm^2 et un mm^2. Il demande aux élèves d'identifier ces unités sur le papier millimétré et peut alors donner la consigne.
- *Consigne :* “ Déterminer l'aire de chaque figure en cm^2 (la calculatrice n'est pas autorisée). Les classer par aire de la plus petite à la plus grande ”.

Les élèves travaillent seuls, puis confrontent leur classement deux à deux.

Le classement n'est pas un but en soi, c'est un moyen pour motiver le calcul des aires et la confrontation des résultats. Il est donc préférable de déterminer les aires avant de les classer.

Les dimensions des rectangles proposés sont soigneusement choisies :

- *3 cm × 2 cm : les élèves savent calculer l'aire d'un rectangle de dimensions entières soit par comptage soit par l'emploi de la formule ;*
- *0,5 cm × 4,5 cm et 2,5 cm × 2,5 cm : les procédures de comptages restent encore économiques. L'aire du carré est l'aire maximale possible et proche de l'aire des rectangles suivants ;*
- *2,7 cm × 2,3 cm, 2,6 cm × 2,4 cm, 2,8 cm × 2,2 cm et 2,9 cm × 2,1 cm ont pour aires respectives 6,21 cm², 6,24 cm², 6,16 cm² et 6,09 cm².Ces résultats sont proches de l'aire du carré 6,25 cm², ce qui devrait rendre difficile le classement lors de procédures de comptage. De plus pour l'aire du dernier rectangle certains élèves peuvent compter 6 cm² et 9 mm² qu'ils pourront coder 6,9 cm².*

- <u>La mise en commun</u> porte sur les calculs d'aire.

  Elle devrait faire apparaître les procédures suivantes :

  - comptage de carreaux (pour une même figure, cette méthode peut conduire à des résultats différents) ;
  - la multiplication d'entiers après avoir procédé à des changements d'unités ;
  - la multiplication de nombres décimaux.

On amorce le débat par le biais du classement.

La classe se met d'accord sur le fait que le rectangle de dimensions 0,5 cm × 4,5 cm a la plus petite aire : elle est égale à 2,25 cm² ou 2 cm² et $\frac{1}{4}$ *de cm²(procédures de comptage). On rappelle que* $0{,}25 = \frac{1}{4}$.

Puis on étudie les rectangles suivants. Devant la pluralité des propositions pour chaque cas, on valide l'aire en recensant les procédures :

- *par comptage, l'imperfection et le manque de précision des tracés vont nous être utiles pour mettre à mal les procédures de comptage ;*
- *par changement d'unités ;*
- *éventuellement par la multiplication de deux décimaux. Dans ce dernier cas il faudra pour valider la réponse utiliser le changement d'unités :*

  $2{,}6\text{ cm} \times 2{,}4\text{ cm} = 26\text{ mm} \times 24\text{ mm} = 624\text{ mm}^2 = 6{,}24\text{ cm}^2$.

La classe valide les résultats par comptage sur le transparent où sont dessinés les 7 rectangles agrandis (annexe 1).

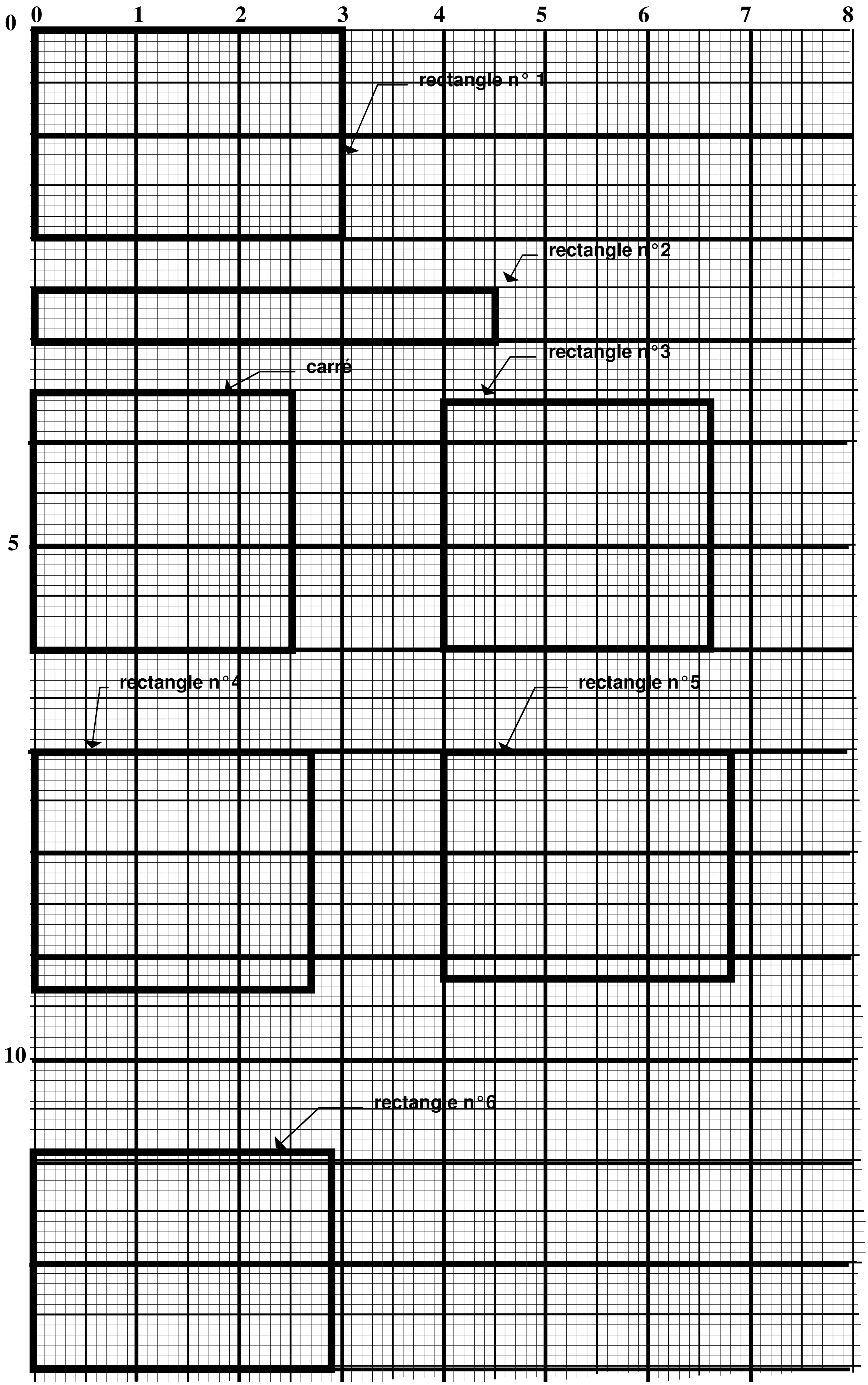
Après en avoir terminé avec l'aire des figures, on finit en validant le classement.

La multiplication de deux décimaux apparaît comme une méthode économique pour déterminer l'aire de n'importe quel rectangle. Elle permet d'éviter les méthodes de comptage et de contourner les difficultés dues à l'imprécision des tracés.

- Institutionnalisation :

    - ♦ **Quand on multiplie les deux dimensions (longueur et largeur) d'un rectangle, exprimées dans la même unité, sous forme décimale, on obtient l'aire du rectangle dans l'unité d'aire correspondante.**
    - ♦ **Quand on veut déterminer l'aire d'un rectangle, il est plus rapide et plus sûr d'utiliser la multiplication.**
    - ♦ **Il n'est pas nécessaire de dessiner pour déterminer l'aire d'un rectangle.**

- Exercices de calcul d'aires pour des figures de dimensions décimales : ils sont nombreux et variés dans les manuels.



0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
5
10
rectangle n° 1
rectangle n°2
rectangle n°3
carré
rectangle n°4
rectangle n°5
rectangle n°6

Situation 10 : Multiplication et proportionnalité

On peut choisir de traiter la situation décrite ici avant la situation précédente, mais dans ce cas, pour que l'enchaînement ne produise pas un effet de guidage, il faudra laisser un laps de temps suffisant entre les deux situations.

La situation 9 permet de donner du sens à la multiplication de deux décimaux en s'appuyant sur le calcul d'aire. Il s'agit ici d'utiliser la proportionnalité pour installer un autre sens de la multiplication.

1) **Durée :** 3 séances de 55 minutes + exercices.

2) **Apprentissages visés :**

- Prendre une fraction d'un nombre, c'est à dire multiplier le nombre par la fraction.
- Prendre une fraction décimale d'un nombre, c'est à dire multiplier par un nombre décimal.
- Effectuer le produit d'un nombre décimal par une fraction.
- Effectuer le produit d'un nombre décimal par un décimal.

Remarque : cette situation nécessite que les élèves sachent diviser un décimal par 10, 100, 1000...

3) **Description de l'activité :**

Les élèves disposent de rectangles tous identiques, figurant des tablettes de chocolat. Ils recherchent la masse de différentes parts, exprimées sous forme fractionnaire ou décimale.

Dans la séance 1, on établit, en s'appuyant sur le dessin, comment multiplier un nombre décimal par une fraction (prendre une fraction d'un nombre décimal).

Dans la séance 2, toujours en s'appuyant sur le dessin, les élèves réinvestissent les procédures institutionnalisées en séance 1 ou en élaborent d'autres pour prendre une fraction décimale d'un nombre. Puis des fractions décimales plus complexes sont proposées dans un problème identique ce qui permet de faire apparaître la multiplication par un décimal comme un procédé économique.

Dans la séance 3, en s'appuyant sur les exemples des séances précédentes, on justifie le placement de la virgule dans la multiplication de deux décimaux.

4) **Matériel :**

Séance 1 : Pour la classe :

- un transparent de l'annexe 1.

Pour chaque élève :

- des ciseaux et de la colle ;
- une calculette ;

- un guide-âne (dont les lignes ne sont pas trop espacées, voir situation 2) ;
- la première partie de l'annexe 2 ;
- éventuellement des exercices de l'annexe 4 (1ère partie).

Séance 2 : Pour chaque élève :

- le même matériel qu'en séance 1 ;
- la deuxième partie de l'annexe 2 ;
- éventuellement la 2ème partie de l'annexe 4.

Prévoir des rectangles supplémentaires (annexe 3).

5) Déroulement :

Séance 1 : Prendre une fraction de

- Phase 1 : Les élèves disposent de l'énoncé suivant : " Des enfants ont des tablettes de chocolat qui pèse 2,52 hg chacune. Anne a pris 3 tablettes de chocolat, Bob a pris $\frac{1}{4}$ de tablette, et Caroline a pris une tablette et demie. Quelle masse de chocolat possède Anne ? Même question pour Bob et pour Caroline ".

  Chaque élève recherche la masse de chocolat d'Anne et de Bob, par la procédure de son choix, avec sous les yeux le dessin figurant les parts de chacun.

  La classe valide les résultats :

  - pour Anne (ce résultat et les procédures pour l'obtenir : addition réitérée ou multiplication par 3, ne devraient pas poser de problème) ;
  - pour Bob (division par 4) ;
  - pour Caroline (ajout d'une demi-tablette à une tablette, éventuellement multiplication par 1,5 en référence à l'expression une fois et demie).

  En conclusion, le professeur pourra signaler que cette situation est une situation de proportionnalité.

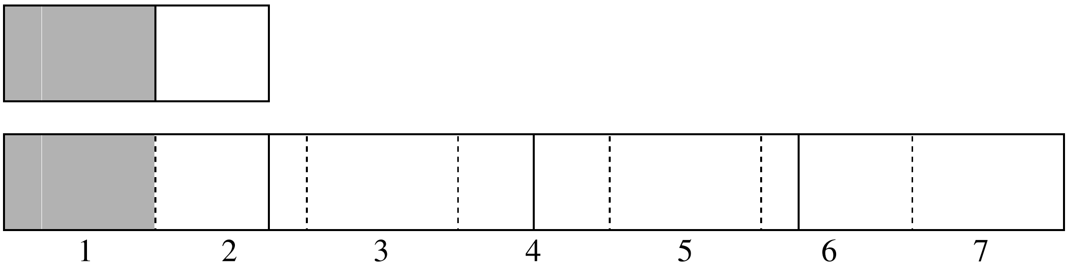
Cette phase a pour objectif de s'assurer que les élèves font l'hypothèse que la masse de chocolat est proportionnelle au nombre de tablettes et à l'aire de la part.

- Phase 2 : Les élèves ont à leur disposition plusieurs rectangles symbolisant des tablettes de chocolat (première partie de l'annexe 2). " Denis a pris 4/7 de tablette et Emilie 0,7 tablette. Dessinez leur part, collez-la sur le cahier ; indiquez combien pèse la part de chacun ; indiquez comment vous avez fait. " (Pour Denis, on attend un partage en 7 parts au guide-âne ; pour Emilie, on attend un partage en dixièmes après avoir remplacé 0,7 par l'écriture fractionnaire 7/10).

  Les élèves travaillent par 2 et l'enseignant peut intervenir dans les groupes pour le travail de dessin et de découpage : il s'agit de donner aux élèves un support pour élaborer leurs stratégies. Pour partager en 10 parties, on peut soit partager la longueur en 5 et la largeur en 2, soit partager la longueur ou la largeur en 10.

A la mise en commun, on prend appui sur les procédures utilisées dans la construction des parts pour valider la procédure de calcul : diviser par 7 et multiplier par 4 ; diviser par 10 et multiplier par 7.

L'utilisation de la procédure qui consiste à accoler 4 tablettes et à partager l'ensemble en 7 est moins probable. Si elle apparaît, la validation se fera par comparaison (superposition des parts obtenues par les 2 méthodes) comme le montre le dessin ci-dessous :



Si cette procédure n'apparaît pas, le professeur la présentera et en demandera la validation à la classe.

L'équivalence des procédures utilisées dans la construction des parts conduit à institutionnaliser les procédures de calcul. Par extension de sens, le professeur définit la multiplication d'un nombre par une fraction.

- Institutionnalisation :
  - **La masse de chocolat est proportionnelle au nombre de tablettes.**
  - **Quand on prend 3 tablettes, la masse est multipliée par 3.**
  - **Quand on prend 4/7 de tablette, la masse est multipliée par 4/7 :**

    $$\mathbf{2{,}52 \times \frac{4}{7} = (2{,}52 \times 4) : 7 = (2{,}52 : 7) \times 4.}$$

  - **Quand on prend 0,7 tablette, la masse est multipliée par 7/10 :**

    $$\mathbf{2{,}52 \times 0{,}7 = 2{,}52 \times \frac{7}{10} = (2{,}52 \times 7) : 10 = (2{,}52 : 10) \times 7.}$$

- Exercices : Donner des exercices du type de ceux proposés en annexe 4 (on ne visera la maîtrise technique qu'à la fin des activités de cette situation).

Séance 2 : Multiplication d'un décimal par un décimal

- Phase 3 : *Consigne* : “ Farid a pris 2,36 tablettes. Dessinez sa part ” (2ème partie de l'annexe 2).

  Les élèves travaillent par 2 et dessinent la part de Farid (il est important que les élèves aient vécu la situation 8, sinon ils vont perdre beaucoup de temps) ; ils collent leur dessin sur leur cahier.

On attend des élèves qu'ils partagent un rectangle en centièmes (10 lignes et 10 colonnes ou autre partage).

Consigne : “ Calculez combien pèse sa part ; indiquez comment vous faites. Trouvez 2 méthodes au moins ”.

Des élèves qui proposeraient ici la multiplication 2,36 × 2,52 n'auront pas forcément fait le lien entre la multiplication par une fraction et la multiplication par un décimal. Trouver une 2ème méthode les oblige à prendre conscience de ce lien.

Les élèves travaillent un temps seuls, puis se remettent à deux pour comparer et vérifier leurs résultats.

La synthèse est l'occasion de répertorier toutes les méthodes de dessin ou de calcul : pour prendre 2,36 tablettes, on peut prendre 236/100 de tablette, ou 2 tablettes et 36/100 de tablette, ou 2 tablettes + 3/10 de tablette + 6/100 de tablette.

La procédure multiplicative 2,36 × 2,52 sera prise comme une autre, sans valorisation, dans cette phase.

- Phase 4 : *Consigne à rajouter à ce moment-là aux élèves* : " Gaël a pris 21,7825 tablettes. Calculez combien pèse sa part. Indiquez comment vous faites. Trouvez au moins 2 méthodes ".

Les élèves travaillent seuls puis comparent leurs méthodes et résultats.

Le nombre a été choisi de façon à ce que :

- *d'une part, devant l'impossibilité de partager en 10 000 et de prendre 21 tablettes, les élèves abandonnent le dessin ;*
- *d'autre part, le caractère fastidieux de l'utilisation de la décomposition en 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10 000 pousse les élèves à prendre directement les 217 825/10 000 de 2,52. Cette méthode met plus facilement en évidence le déplacement de la virgule dans la multiplication par un décimal.*

La synthèse en grand groupe porte sur la comparaison des différentes méthodes : elle est l'occasion d'amener, si aucun groupe n'y a eu recours, la multiplication directe de deux décimaux, à la calculette. Cette synthèse permet de montrer l'équivalence des différentes méthodes et évalue leur rapidité (les 2 méthodes les plus rapides étant : (2,52 × 217 825) ÷ 10 000 à la main, et 217,825 × 2,52 à la calculette), afin de faire apparaître la multiplication de 2 décimaux comme un outil nouveau et performant.

- Institutionnalisation :

On peut utiliser le signe × dans plusieurs situations :

- **masse de 3 tablettes de 2,52 hg :** $\mathbf{2{,}52 \times 3}$
- **masse de $\frac{7}{10}$ de tablette de 2,52 hg :**

$$2{,}52 \times \frac{7}{10} = 2{,}52 \times 0{,}7 = (2{,}52 \times 7) : 10 = (2{,}52 : 10) \times 7$$

- **masse de 2,36 tablettes de 2,52 hg :**

$$2{,}52 \times 2{,}36 = 2{,}52 \times \frac{236}{100} = (2{,}52 \times 236) : 100 = (2{,}52 : 100) \times 236$$

- **masse de 21,7825 tablettes de 2,52 hg :**

$$2{,}52 \times 21{,}7825 = 2{,}52 \times \frac{217\,825}{10\,000} = (2{,}52 \times 217\,825) : 10\,000 = (2{,}52 : 10\,000) \times 217\,825$$

- Exercices : (voir annexe 4) Donner des exercices de multiplication :
  - d'un nombre entier ou décimal par une fraction ;
  - d'un nombre entier ou décimal par un décimal (à remplacer par une fraction).

Séance 3 : Justification du placement de la virgule dans la multiplication de deux décimaux

En s'appuyant sur les exemples utilisés dans les phases 2, 3 et 4, on formule qu'une possibilité pour multiplier par :

- 0,7 est de multiplier par 7 et de diviser le résultat obtenu par 10 ;
- 2,36 est de multiplier par 236 et de diviser le résultat obtenu par 100 ;
- 21,7825 est de multiplier par 217 825 et de diviser le résultat obtenu par 10 000.

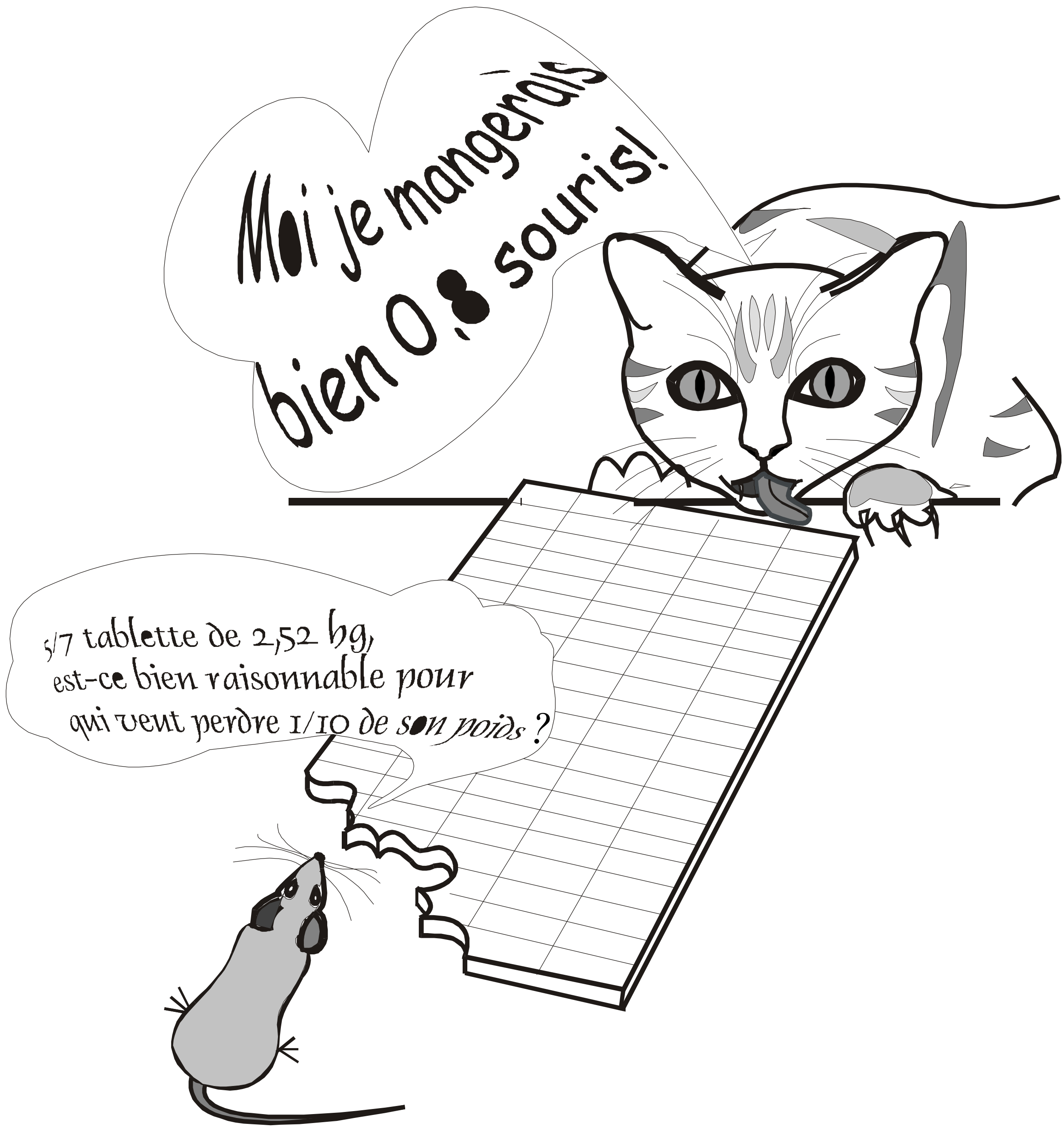
Le professeur fait remarquer aux élèves qu'ils ont déjà appris à multiplier un nombre par un entier ainsi qu'à diviser par une puissance de 10. Ils ont maintenant tous les éléments pour multiplier à la main un nombre par un décimal.

Puis le professeur leur demande de calculer à la main des produits de nombres décimaux, en choisissant des nombres très simples.

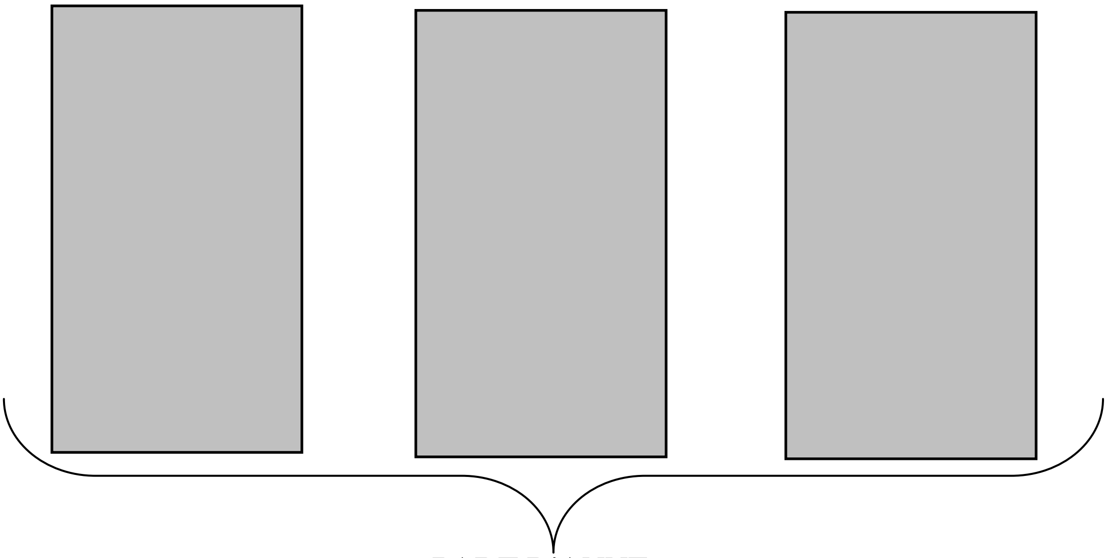
Ces exercices permettront de mettre en évidence, dans le résultat, le nombre de chiffres placés à droite de la virgule. On introduira ainsi la règle de placement de la virgule dans la multiplication de 2 décimaux.

- Institutionnalisation :
  - ♦ **Pour effectuer le produit de 2 décimaux :**
    - **on effectue le produit des 2 nombres comme s'ils étaient entiers ;**
    - **on place la virgule. Il doit y avoir autant de chiffres derrière la virgule qu'il y en a derrière la virgule au total dans les 2 nombres de départ.**

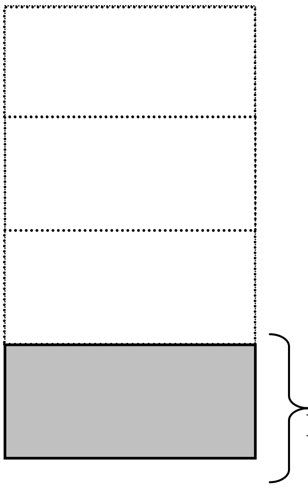
- Exercices : de votre manuel, placement de virgules, mélange de produits d'un nombre par une fraction, par un décimal (avec ou sans contexte), problèmes.


Moi je mangerais bien 0,8 souris!
5/7 tablette de 2,52 hg,
est-ce bien raisonnable pour
qui veut perdre 1/10 de son poids ?

PRENDRE UN NOMBRE DE...

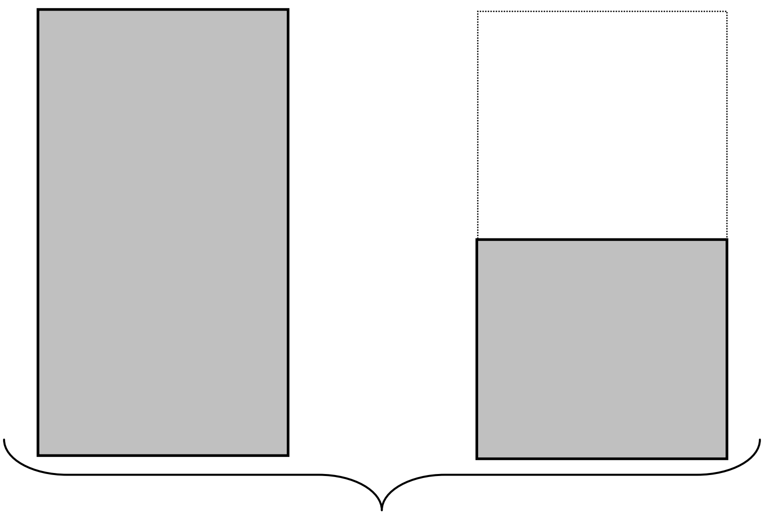


PART D'ANNE



PART DE BOB

Des enfants ont pris des tablettes de chocolat qui pèsent 2,52 hg chacune. Anne a pris 3 tablettes ; Bob a pris $\frac{1}{4}$ de tablette, et Caroline a pris une tablette et demie.
Calcule combien pèse la part de chacun.



PART DE CAROLINE

PRENDRE UN NOMBRE DE ...

Des enfants disposent de tablettes de chocolat qui pèsent 2,52 hg.
En voici une :

Masse nette :

2,52 hg

a) Denis a pris 4/7 de tablette
Découpe et colle sa part. Combien pèse-t-elle ? Indique comment tu as fait pour calculer.

b) Emilie a pris 0,7 tablette.
Découpe et colle sa part. Combien pèse-t-elle ? Indique comment tu as fait pour calculer.

TABLETTES A DECOUPER

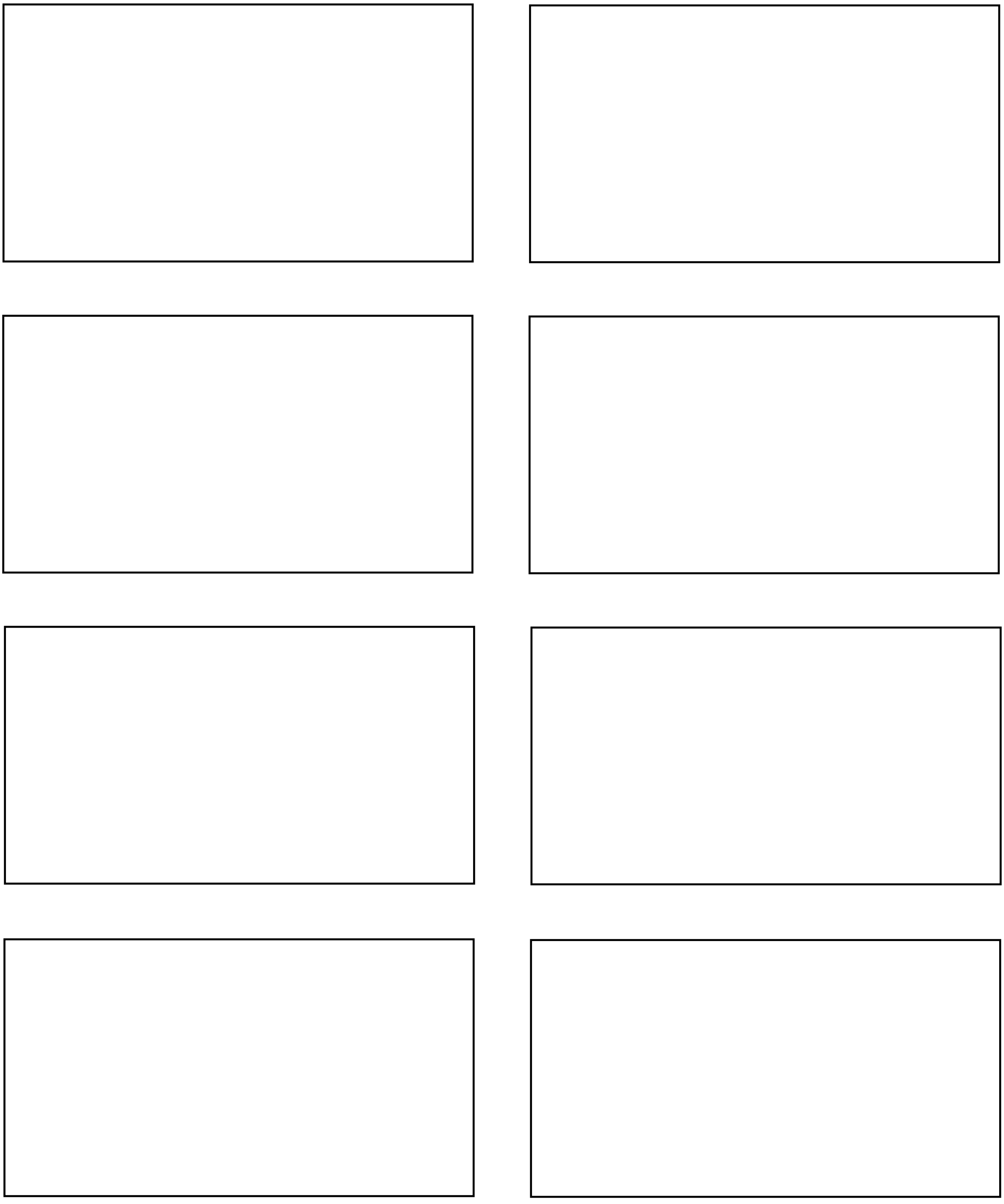
Farid a pris 2,36 tablettes.
Dessine sa part et calcule combien elle pèse. Indique comment tu as fait pour calculer.
Trouve au moins 2 méthodes de calcul.

TABLETTES A DECOUPER

Masse nette :

2,52 hg

RECTANGLES SUPPLEMENTAIRES



Exercices : *(A proposer après la séance 1)*

1) Une tablette pèse 2,52 hg. Michel prend 0,8 tablette de chocolat, Nicolas prend 5/7 de tablette.
   Combien pèsent leurs parts ?

2) Une allumette mesure 4,5 cm ;
   a) tracer un trait long comme 4 allumettes ; calculer sa longueur ;
   b) tracer un trait long comme 5/9 d'allumette, calculer sa longueur ;
   c) tracer un trait long comme 0,4 allumette, calculer sa longueur.

3) Quelle somme possède-t-on si l'on a les $\frac{2}{7}$ de 21 € ?

4) 3 garçons se partagent une somme de 70 €. Le premier prend $\frac{3}{7}$ de la somme, le second en prend $\frac{2}{5}$; quelle somme reste-t-il au troisième ?

Exercices : *(A proposer après la séance 2)*

1) Il y a 60 minutes dans chaque heure. Calculer combien il y a de minutes dans :
   a) 2 h 48 min b) $\frac{5}{6}$ d'heure c) 1,8 heure

2) Un gâteau coûte 50,40 €.
   a) Calculer combien coûtent 4/9 de gâteau ;
   b) calculer combien coûtent 13/7 de gâteau ;
   c) calculer combien coûtent 2,8 gâteaux ;
   d) calculer combien on peut acheter de gâteaux avec 35,28 €.

3) Un commerçant possédait un rouleau de tissu de 120,3 m. Hier, il a vendu 0,6 rouleau. Calculer la longueur de tissu qui lui reste aujourd'hui.

4) Avec une balance de grande précision, on cherche la masse de 1 m d'une chaîne en or, et on trouve 2,9425 kg.
   Calculer (***en utilisant au moins deux méthodes)*** la masse de 3,25 m de chaîne .

5) Effectuer les calculs suivants de 2 manières différentes:

   $\frac{5}{3} \times 29{,}7 =$ $18{,}7 \times \frac{2}{100} =$ $21{,}307 \times 37{,}8 =$

   Pour chacun de ces calculs, inventer un énoncé.

6) Un litre d'huile d'olive coûte 6,28 €.
   - Calculer le prix de 22,5 L.
   - Calculer le prix de 51,25 L.
   - Combien de litres peut-on acheter avec 180,55 € ?

CONCLUSION

Les changements de structure et d'environnement lors du passage de l'école élémentaire à la sixième sont déroutants pour plus d'un collégien débutant. Pour atténuer ces ruptures nous avons travaillé dans la continuité des apprentissages. Les dix situations abordent les nombres décimaux comme le suggèrent les instructions données par les programmes de l'école élémentaire et du collège. Elles constituent, dans leur domaine, une bonne articulation CM2-sixième.

Pour ce faire, nous avons abordé le programme de manière inhabituelle mais cohérente, en tenant compte des besoins de chaque élève, sans ce sentiment de « replâtrage » que nous avions parfois, dans le passé, quand nous reprenions les exercices classiques et répétitifs sur les changements d'écritures. Ces exercices lassaient les meilleurs et n'aidaient pas toujours ceux qui avaient pris un mauvais départ. Notre progression a permis de répondre à nos difficultés lorsqu'il s'agissait de remédier aux erreurs inhérentes aux nombres décimaux. En appréhendant l'histoire de l'écriture décimale et en considérant le travail fait à l'école élémentaire, nous avons pu construire et donner du sens à la fraction puis au nombre décimal et enfin à la multiplication des nombres décimaux.

Les différentes et fréquentes manipulations de matériel créent les conditions qui permettent à tous les élèves d'être actifs et d'entrer en apprentissage. C'est un temps fort de cet apprentissage.

Pourtant, ceux qui sont en difficulté ne font pas toujours ce que l'enseignant croit qu'ils font, par exemple : ils plient des bandes alors que nous croyons qu'ils travaillent sur les fractions. Mais ce qui peut apparaître comme un inconvénient nous a, en fait, été utile. Les obstacles rencontrés par les élèves pour passer de l'action matérielle à l'action intellectuelle nous ont appris à être encore plus attentifs aux temps d'institutionnalisation, au rôle des exercices intermédiaires, à l'importance de la représentation du but à atteindre et à la communication aux élèves de nos objectifs.

Les élèves ont pris facilement les activités à leur compte et se sont largement investis. Ils ont géré sans difficulté leur matériel (bandes unités, guide-âne, règles graduées…), se sont appropriés des outils nouveaux et n'ont pas hésité à s'en servir. Ils ont gagné en autonomie.

Notre expérimentation s'est déroulée sur trois ans et nous avons pu remarquer que les élèves qui ont suivi cette progression avaient des compétences bien meilleures que les autres dans les calculs comportant des fractions ou des écritures décimales. Dès la sixième, les changements d'écritures ne posent plus de problème, de même que l'ordre des nombres décimaux. Les tests que nous avons faits dans nos différents collèges montrent que nos élèves ont acquis une bonne maîtrise des différents sens de la fraction et donc de bonnes bases pour les classes de cinquième et de quatrième. Travailler sur le sens des opérations n'est pas toujours aisé mais très révélateur des difficultés. Même si quelques erreurs témoignent encore d'un apprentissage en cours, nous avons le sentiment d'avoir mieux réussi. Le travail sur les valeurs exactes et approchées, commencé en sixième avec les quotients, se poursuivra tout au long du collège. L'introduction du guide-âne permettra d'illustrer Thalès en quatrième ou en troisième.

Cette programmation nous a paru bénéfique pour tous :

- pour les élèves qui ont construit leurs connaissances et sont devenus plus performants ;
- pour les professeurs qui ont eu du plaisir à changer leur enseignement et à construire pour mieux répondre aux besoins de leurs élèves.

L'heure est à « passer d'une hétérogénéité subie, …, à une hétérogénéité maîtrisée ». Peut-être notre brochure va-t-elle dans cette direction ? Elle offre la possibilité de reconstruire pour certains élèves, d'approfondir pour d'autres, tout en restant dans le cadre du programme.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP (1986), « *Nombres décimaux* », Aides pédagogiques pour le cycle moyen, tome 2, *Elem Math VIII*, publication APMEP n°61.

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988), « *Problème ouvert et situation-problème* », IREM de Lyon.

BROUSSEAU G. (1980), « *Problèmes de l'enseignement des décimaux* », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 1-1, La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1981), « *Problèmes de didactique des décimaux* », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 1-2, La pensée sauvage, Grenoble.

COLETTE J.-P. (1973), *« Histoire des mathématiques »*, Editions du Renouveau pédagogique, Montréal.

COMITI C. et NEYRET R. (1981), « Les décimaux », Grand N n° 18 , IREM de Grenoble.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (1986), « *Liaison École-Collège, Nombres décimaux* », IREM Paris VII.

ERMEL (1982), « *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 2* », Hatier.

ERMEL (1991), « *Apprentissages mathématiques en 6^{e}* », Hatier.

ERMEL (1991), « *Apprentissages mathématiques en 5^{e}* », INRP.

ERMEL (1997), « *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours moyen première année* », Hatier.

ERMEL (1999), *« Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours moyen deuxième année* », Hatier.

EVAMATH (1994), *« Réflexions et activités CM2 - 6ème en mathématiques »*, CRDP de Nice.

GRISVARD C. et LEONARD F. (1981), *« Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs »*, bulletin APMEP n°327.

GRISVARD C. et LEONARD F. (1983), *« Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux »*, bulletin APMEP n°340.

IFRAH G. (1993), *« Histoire universelle des chiffres »*, Collection Bouquins, Laffont.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1985), « *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège* », IREM Paris VII.

STEVIN S. (1585), *« La disme »*, Reproduction de textes anciens, IREM Paris VII.

VERGNAUD G. (1991), « *La théorie des champs conceptuels* », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 10-2.3, La pensée sauvage, Grenoble.

Titre : **La sixième entre fractions et décimaux**

Auteurs : Anselmo Bernard ; Bonnet Monique ; Colonna Alain ;
Combier Georges ; Latour Jacky ; Planchette Paul.

Editeur : IREM de Lyon

Public visé : Enseignants de mathématiques en collège et maîtres de cycle 3

Date : Novembre 1999

Résumé : Les évaluations à l'entrée en sixième montrent que les connaissances relatives aux nombres décimaux ne sont pas stabilisées pour plus d'un tiers des élèves. S'appuyant sur ce constat, les programmes de 1995 mentionnent la nécessité de reprendre en sixième l'étude des nombres décimaux du point de vue du sens. Ils transfèrent en collège l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, tant en ce qui concerne le sens que la technique de calcul. Cette brochure se veut une réponse à cette demande.

Après une brève approche historique de l'émergence des décimaux ainsi que de l'évolution des programmes sur ce thème, les auteurs développent leur réflexion sur l'apprentissage des « fractions » et des décimaux, les conceptions qu'ils souhaitent installer chez leurs élèves sur ces deux thèmes. Ils proposent une programmation des apprentissages pour la classe de sixième, visant une approche rationnelle et cohérente des décimaux, qui prend appui sur les fractions.

La programmation, qui a fait l'objet d'une large expérimentation, est constituée d'une succession de dix situations recouvrant pour une large part la partie « Travaux numériques » du programme de la classe de $6^{ème}$. Chaque situation est présentée avec ses objectifs, sa durée, sa description détaillée et les documents prêts à photocopier pour une utilisation immédiate dans la classe.

Mots clés : Décimaux, fractions, quotient, multiplication, situations d'apprentissage, collège, sixième, articulation école-collège.

Format : A4 **Nombres de pages :** 150

N° ISBN : 2-906943-43-6